AL-MG

Assembléia Legislativa de Minas Gerais

Matemática

SUMÁRIO

RAZÕES E PROPORÇÕES

RAZÃO E PROPORÇÃO COM APLICAÇÕES

A razão entre duas grandezas é igual à divisão entre elas, veja:

$$\frac{2}{5}$$

Ou podemos representar por 2 ÷ 5 (lê-se 2 está para 5).
Já a proporção é a igualdade entre razões, veja:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Ou podemos representar por 2 ÷ 3 = 4 ÷ 6 (lê-se 2 está para 3 assim como 4 está para 6).
Os problemas mais comuns que envolvem razão e proporção é quando se aplica uma **variável** qualquer dentro da proporcionalidade e se deseja saber o valor dela. Veja o exemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{6} \text{ ou } 2 \div 3 = x \div 6$$

Para resolvermos esse tipo de problema devemos usar a Propriedade Fundamental da razão e proporção: **produto dos meios pelos extremos**.
Meio: 3 e x;
Extremos: 2 e 6.
Logo, devemos fazer a multiplicação entre eles numa igualdade. Observe:

$$3 \cdot X = 2 . 6$$

$$3X = 12$$

$$X = 12/3$$

$$X = 4$$

Lembre-se de que a maioria dos problemas envolvendo esse tema são resolvidos utilizando essa propriedade fundamental. Porém, algumas questões acabam sendo um pouco mais complexas e pode ser útil conhecer algumas propriedades para facilitar. Vamos a elas!

Propriedade das Proporções

- **Somas Externas**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Vamos entender um pouco melhor resolvendo uma questão-exemplo:
Suponha que uma fábrica vai distribuir um prêmio de R$10.000 para seus dois empregados (Carlos e Diego). Esse prêmio vai ser dividido de forma proporcional ao tempo de serviço deles na fábrica. Carlos está há 3 anos na fábrica e Diego está há 2 anos. Quanto cada um vai receber?
Resolução:
Primeiro, devemos montar a proporção. Sejam C a quantia que Carlos vai receber e D a quantia que Diego vai receber, temos:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2}$$

Utilizando a propriedade das somas externas:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{C+D}{3+2}$$

Perceba que C + D = 10.000 (as partes somadas), então podemos substituir na proporção:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{C+D}{3+2} = \frac{10.000}{5} = 2.000$$

Aqui cabe uma observação importante!

Esse valor 2.000, que chamamos de “Constante de Proporcionalidade”, é que nos mostra o valor real das partes dentro da proporção. Veja:

$$\frac{C}{3} = 2.000$$

$$C = 2000 \cdot 3$$

$$C = 6.000 \text{ (esse é o valor de Carlos)}$$

$$\frac{D}{2} = 2.000$$

$$D = 2.000 \cdot 2$$

$$D = 4.000 \text{ (esse é o valor de Diego)}$$

Assim, Carlos vai receber R$6.000 e Diego vai receber R$4.000.

- **Somas Internas**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

É possível, ainda, trocar o numerador pelo denominador ao efetuar essa soma interna, desde que o mesmo procedimento seja feito do outro lado da proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

Vejamos um exemplo:

$$\frac{x}{14-x} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{x+14-x}{x} = \frac{2+5}{2}$$

$$\frac{14}{x} = \frac{7}{2}$$

$$7 \cdot x = 2 \cdot 14$$

$$x = \frac{14 \cdot 2}{7} = 4$$

Portanto, encontramos que x = 4.

Importante!

Vale lembrar que essa propriedade também serve para subtrações internas.

- **Soma com Produto por Escalar**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+2b}{b} = \frac{c+2d}{d}$$

Vejamos um exemplo para melhor entendimento:

Uma empresa vai dividir o prêmio de R$13.000 proporcionalmente ao número de anos trabalhados.

São dois funcionários que trabalham há 2 anos na empresa e três funcionários que trabalham há 3 anos.

Resolução:

Seja A o prêmio dos funcionários com 2 anos e B o prêmio dos funcionários com 3 anos de empresa, temos:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3}$$

Porém, como são 2 funcionários na categoria A e 3 funcionários na categoria B, podemos escrever que a soma total dos prêmios é igual a R$13.000.

$$2A + 3B = 13.000$$

Agora multiplicando em cima e embaixo de um lado por 2 e do outro lado por 3, temos:

$$\frac{2A}{4} = \frac{3B}{9}$$

Aplicando a propriedade das somas externas, podemos escrever o seguinte:

$$\frac{2A}{4} = \frac{3B}{9} = \frac{2A+3B}{4+9}$$

Substituindo o valor da equação 2A + 3B na proporção, temos:

$$\frac{2A}{4} = \frac{3B}{9} = \frac{2A+3B}{4+9} = \frac{13.000}{13} = 1.000$$

Logo,

$$\frac{2A}{4} = 1.000$$

$$2A = 4 \cdot 1.000$$

$$2A = 4.000$$

$$A = 2.000$$

Fazendo a mesma resolução em B:

$$\frac{3B}{9} = 1.000$$

$$3B = 9 \cdot 1.000$$

$$3B = 9.000$$

$$B = 3.000$$

Sendo assim, os funcionários com 2 anos de casa receberão R$2.000 de bônus. Já os funcionários com 3 anos de casa receberão R$3.000 de bônus.

O total pago pela empresa será:

$$\text{Total} = 2 \cdot 2000 + 3 \cdot 3000 = 4000 + 9000 = 13000.$$

GRANDEZAS DIRETA E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Diretamente Proporcional

Um dos tópicos mais comuns em questões de prova é “dividir uma determinada quantia em partes proporcionais a determinados números. Vejamos um exemplo para entendermos melhor como esse assunto é cobrado:

Exemplo:

A quantia de 900 mil reais deve ser dividida em partes proporcionais aos números 4, 5 e 6. A menor dessas partes corresponde a:

Primeiro vamos chamar de X, Y e Z as partes proporcionais, respectivamente a 4, 5 e 6. Sendo assim, X é proporcional a 4, Y é proporcional a 5 e Z é proporcional a 6, ou seja, podemos representar na forma de razão. Veja:

$$\frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{Z}{6} = \text{constante de proporcionalidade.}$$

Usando uma das propriedades da proporção, somas externas, temos:

$$\frac{X + Y + Z}{4 + 5 + 6} \quad \frac{900.000}{15} = 60.000$$

A menor dessas partes é aquela que é proporcional a 4, logo:

$$\frac{X}{4} = 60.000$$

$$X = 60.000 \cdot 4$$

$$X = 240.000$$

Inversamente Proporcional

É um tipo de questão menos recorrente, mas, não menos importante. Consiste em distribuir uma quantia X a três pessoas, de modo que cada uma receba um quinhão inversamente proporcional a três números. Vejamos um exemplo:

Exemplo:

Suponha que queiramos dividir 740 mil em partes inversamente proporcionais a 4, 5 e 6.

Vamos chamar de X as quantias que devem ser distribuídas inversamente proporcionais a 4, 5 e 6, respectivamente. Devemos somar as razões e igualar ao total que dever ser distribuído para facilitar o nosso cálculo, veja:

$$\frac{X}{4} + \frac{X}{5} + \frac{X}{6} = 740.000$$

Agora vamos precisar tirar o M.M.C. (mínimo múltiplo comum) entre os denominadores para resolvermos a fração.

$$\begin{array}{l|l} 4 - 5 - 6 & 2 \\ 2 - 5 - 3 & 2 \\ 1 - 5 - 3 & 3 \\ 1 - 5 - 1 & 5 \\ 1 - 1 - 1 & 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \end{array}$$

Assim, dividindo o M.M.C. pelo denominador e multiplicando o resultado pelo numerador temos:

$$\frac{15x}{60} + \frac{12x}{60} + \frac{10x}{60} = 740.000$$

$$\frac{37x}{60} = 740.000$$

$$X = 1.200.000$$

Agora, basta substituir o valor de X nas razões para achar cada parte da divisão inversa.

$$\frac{x}{4} = \frac{1.200.000}{4} = 300.000$$

$$\frac{x}{5} = \frac{1.200.000}{5} = 240.000$$

$$\frac{x}{6} = \frac{1.200.000}{6} = 200.000$$

Logo, as partes dividas inversamente proporcionais aos números 4, 5 e 6 são, respectivamente, 300.000, 240.000 e 200.000.

Agora vamos treinar o que aprendemos na teoria com exercícios comentados de diversas bancas. Vamos lá!

1. **(FAEPESUL – 2016)** Em uma turma de graduação em Matemática Licenciatura, de forma fictícia, temos que a razão entre o número de mulheres e o número total de alunos é de 5/8. Determine a quantidade de homens desta sala, sabendo que esta turma tem 120 alunos.

a) 43 homens.
b) 45 homens.
c) 44 homens.
d) 46 homens.
e) 47 homens.

A razão entre o número de mulheres e o número total de alunos é de 5/8:

$$\frac{M}{T} = \frac{5}{8}$$

A turma tem 120 alunos, então: T = 120

Fazendo os cálculos:

$$\frac{M}{T} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{M}{120} = \frac{5}{8}$$

$$8 \cdot M = 5 \cdot 120$$

$$8M = 600$$

$$M = \frac{600}{8}$$

$$M = 75$$

A quantidade de homens da sala:

120 - 75 = 45 homens.

Resposta: Letra B.

2. **(VUNESP – 2020)** Em um grupo com somente pessoas com idades de 20 e 21 anos, a razão entre o número de pessoas com 20 anos e o número de pessoas com 21 anos, atualmente, é 4/5. No próximo mês, duas pessoas com 20 anos farão aniversário, assim como uma pessoa com 21 anos, e a razão em questão passará a ser de 5/8. O número total de pessoas nesse grupo é

a) 30.