Carreiras Militares

NV-001NB-25-PREP-CARREIRAS-MILITARES

SUMÁRIO

MATEMÁTICA

NOÇÕES DE CONJUNTOS

A teoria de conjuntos dá sustentação lógica a outros tópicos inerentes à matemática, como, por exemplo: funções, probabilidade, análise combinatória, polinômios, progressões (aritméticas e geométricas) etc.

No contexto da teoria de conjuntos, **três noções primitivas** são aceitas sem definição e, portanto, não necessitam de demonstração. São elas:

CONJUNTOS

Os conjuntos (ou coleções) devem ser representados por letras latinas maiúsculas: A, B, C etc.

Alguns exemplos de conjuntos:

- **M** = {janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro} é o conjunto dos meses do ano que têm 31 dias;
- **P** = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} é o conjunto dos números primos até 19;
- **N** = {Estados Unidos, Canadá, México} é o conjunto dos países da América do Norte.

ELEMENTOS

Os elementos referem-se aos objetos inerentes aos conjuntos, separados por vírgulas ou ponto e vírgula. Nos exemplos anteriores, cada um dos componentes dos conjuntos apresentados são elementos destes. Veja outro exemplo:

- V = {0, 2, 4, 5, 6}. Neste caso, os números 0, 2, 4, 5 e 6 são elementos do conjunto V.

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

A relação de pertinência entre conjunto e elemento estabelece a identificação entre eles. Para tanto utilizamos os símbolos $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence). Observe o conjunto a seguir para compreender melhor:

- **R** = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}:
  - o número 7 não pertence ao conjunto R, ou seja, $7 \notin R$;
  - o número 3 pertence ao conjunto R, ou seja, $3 \in R$.

REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTOS

Existem três maneiras distintas de se apresentar conjuntos:

- analítica,
- sintética;
- diagrama de Venn-Euler (ou, simplesmente, diagrama).

Vamos analisar cada uma delas a seguir:

Na **representação analítica**, destaca-se cada um dos elementos que pertencem a um determinado conjunto.

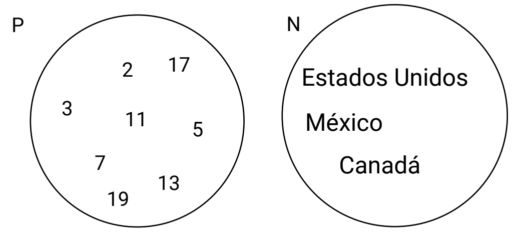
- A = {azul, amarelo, vermelho}.

Por sua vez, quando se tem a **representação sintética**, devemos destacar uma característica que seja comum a todos os elementos pertencentes a um conjunto qualquer.

- A = {x / x é cor primária}:
  - lê-se "x/x" como "x é tal que x tem a propriedade".

Também, quando se tem a **representação por diagramas**, devemos definir uma região (normalmente um círculo) onde devem ser representados todos os elementos pertencentes ao conjunto — é importante não esquecer de nomeá-lo.

Observe as situações a seguir que são exemplos dessa representação:



Representação de conjuntos por diagramas.

DIAGRAMA DE VENN-EULER

Vamos entender como resolver questões que envolvem operações com conjuntos relacionados. Acompanhe os exemplos a seguir e observe a maneira como suas resoluções foram desenvolvidas.

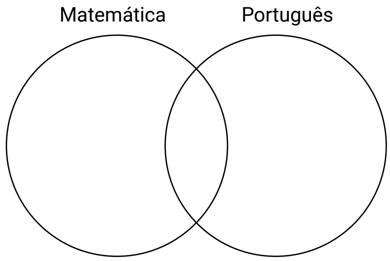
Exemplo: em uma sala de aula, 20 alunos gostam de matemática, 30 gostam de português e 10 gostam das duas matérias. Sabendo que 5 alunos não gostam de nenhuma dessas duas matérias, quantos alunos há nessa sala de aula?

Siga os passos dispostos a seguir:

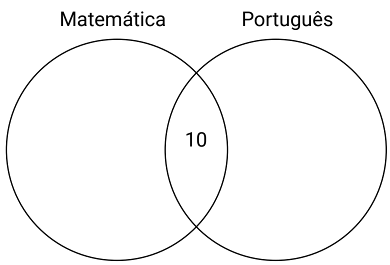
- identifique os conjuntos;
- represente em forma de diagramas e os nomeie;
- preencha as informações de dentro para fora (iniciando na interseção e seguindo para as demais informações);
- preencha as demais informações no diagrama;
- some todas as regiões e iguale ao total de elementos envolvidos.

Vamos à resolução:

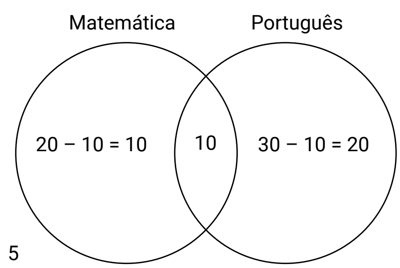
- identifique os conjuntos;
- represente em forma de diagramas e os nomeie;



- preencha as informações de dentro para fora (iniciando na interseção e seguindo para as demais informações);

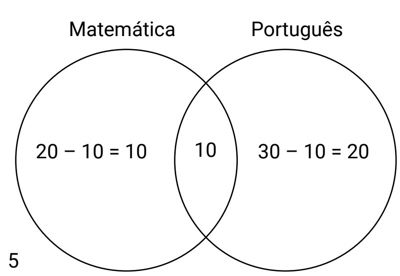


- preencha as demais informações no diagrama;



  - total = x;
  - 20 gostam de matemática;
  - 30 gostam de português;
  - 10 gostam dos dois;
  - 10 gostam apenas de matemática;
  - 20 gostam apenas de português;
  - 5 não gostam de nenhuma;

- some todas as regiões e iguale ao total de elementos envolvidos;



$$10 + 10 + 20 + 5 = x$$

X = 45 alunos, ou seja, o total dessa sala.

Também seria possível resolver esse tipo de questão utilizando a seguinte fórmula:

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$$

Essa fórmula nos informa que o número de elementos da união entre os conjuntos X e Y, $n(X \cup Y)$, é dado pelo número de elementos de X somado ao número de elementos de Y, subtraindo-se o número de elementos da interseção $(X \cap Y)$. Aplicando no exemplo, temos:

- matemática (M)
- português (P)

$$n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P)$$

$$n(M \cup P) = 20 + 30 - 10$$
$$n(M \cup P) = 40$$

Temos 40 alunos que gostam de matemática ou português (incluindo aqueles que gostam de ambas as matérias). Para finalizar a resolução, devemos apenas somar os 5 alunos que não gostam de nenhuma das duas matérias. Assim, 40 + 5 = 45 alunos no total dessa sala.

CONJUNTO UNITÁRIO

Um determinado conjunto recebe o nome de conjunto unitário quando houver a apresentação de exatamente um único elemento (ou objeto).

São exemplos de conjuntos unitários:

- H = {1986} é o conjunto formado pelo ano do século XX em que o cometa Halley pôde ser visto por quem estava na Terra. Observe que esse conjunto apresenta somente um único elemento, ou seja, 1986;
- F = {Michael Phelps} é o conjunto formado pelo esportista que mais ganhou medalhas olímpicas. Observe que esse conjunto apresenta somente um único elemento, ou seja, ele é composto pelo medalhista norte-americano Michael Phelps (ganhador de 28 medalhas olímpicas em um total de quatro olímpiadas que participou);
- L = {2} é o conjunto dos números primos pares. Nesse caso, a este conjunto pertence somente o número 2.

CONJUNTO VAZIO

Um determinado conjunto recebe o nome de conjunto vazio quando não apresenta elemento (ou objeto) algum. A notação utilizada para representar um conjunto vazio é { } ou ∅.

> **Importante!**
>
> É muito comum as pessoas representarem o conjunto vazio da seguinte maneira: {∅} . Na verdade, isso representa um conjunto que dispõe de um único elemento, que é o conjunto vazio. Para evitar esse erro, utilize { } ou ∅, mas nunca as duas representações ao mesmo tempo.

São exemplos de conjuntos vazios:

- conjunto dos meses que apresentam 32 dias;
- países que fazem parte da América do Norte e que começam com a letra W;

- número primo irracional;
- seleção de futebol que tenha conquistado 10 copas do mundo.

CONJUNTO UNIVERSO

Um determinado conjunto recebe o nome de conjunto universo quando a ele pertencem todos os elementos.

No exemplo a seguir, o conjunto universo poderia ser definido da seguinte forma: se escolhêssemos um aluno qualquer do 1º ano B do ensino médio de uma escola e ele apresentasse uma determinada característica (como o uso de óculos de grau), nosso conjunto universo poderia ser representado pela turma à qual o aluno pertence (neste caso, o 1º ano B), ou, ainda, pela escola onde ele estuda. Perceba que, nesse caso, é possível escolher mais de um conjunto universo.

Será possível escolher o conjunto universo ao qual pertencem todos os elementos de interesse. Dentre eles, serão selecionados aqueles que apresentarem a característica procurada ou desejada.

CONJUNTOS IGUAIS

Dois conjuntos A e B são considerados iguais quando todos os elementos de A também pertencem a B, e todos os elementos de B pertencem a A.

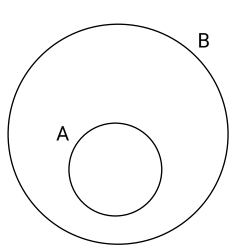
A notação utilizada nesse contexto é a seguinte: $A = B \leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Lê-se: A é igual a B se, e somente se, para todo x, x pertence a A se, e somente se, x pertence a B. De modo simplificado, o entendimento é que o conjunto A é igual ao conjunto B se, e somente se, todo elemento de A também estiver em B, e todo elemento de B também estiver em A. Ou seja, A e B contêm exatamente os mesmos elementos.

SUBCONJUNTOS

Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertencer também a B, mas nem todo elemento de B necessariamente pertence a A.

A notação utilizada nesse contexto é a seguinte: $A \subset B \leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Lê-se: A está contido em B se, e somente se, para todo x, se x pertence a A, então x pertence a B. Simplificando o entendimento, é o mesmo que dizer que o conjunto A está contido no conjunto B se, e somente se, todos os elementos de A também estiverem em B. Isso significa que, ao escolher qualquer elemento de A, ele também estará em B. Se isso for verdade para todos os elementos de A, podemos afirmar que A está contido em B.

Por diagramas, poderíamos representar essa situação da seguinte maneira:



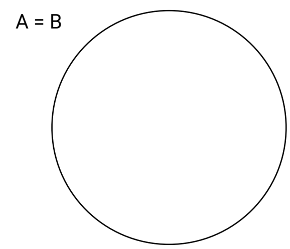
Subconjunto A do conjunto B.

Perceba que todo elemento pertencente ao conjunto A automaticamente pertence também a B. É dessa maneira que representamos, por meio de diagramas, a relação de inclusão $A \subset B$. Concluímos, portanto, que A é subconjunto de B.

Diferentemente da relação entre elementos e conjuntos, em que utilizamos as relações de pertinência ($\in$ ou $\notin$), quando tratamos da relação entre conjuntos, utilizamos os seguintes símbolos:

- $\subset$ (está contido);
- $\not\subset$ (não está contido);
- $\supset$ (contém); ou
- $\not\supset$ (não contém).

Assim, dá-se o nome de subconjunto impróprio de B à seguinte situação:



Subconjunto impróprio de B.

Ou seja, subconjunto impróprio é aquele que é o próprio conjunto.

A notação utilizada nesse contexto é a seguinte: $A = B \leftrightarrow (A \subset B \text{ e } B \subset A)$. Lê-se: A é igual a B, se, e somente se, A está contido em B e B está contido em A. De modo simplificado, dois conjuntos A e B são iguais se todos os elementos de A também estiverem em B, e todos os elementos de B também estiverem em A. Isso significa que A e B têm exatamente os mesmos elementos.

> **Dica**
>
> Ao estudar o subconjunto impróprio, o aluno pode perceber a similaridade entre ele e os conjuntos iguais, embora sejam conceitos distintos. Observe o exemplo a seguir para entender melhor a diferença entre eles.

Para ilustrar o conteúdo mencionado na dica anterior, considere, como exemplo, a existência de duas caixas de brinquedo:

- A caixa A contém os seguintes brinquedos: bola, boneca e carrinho;
- A caixa B contém exatamente os mesmos elementos: bola, boneca e carrinho.

Na perspectiva de **conjuntos iguais**, podemos dizer que as caixas A e B são iguais porque contêm exatamente os mesmos brinquedos. Não há nenhum brinquedo na caixa A que não esteja também na caixa B, e vice-versa. Concluindo, os conjuntos A e B são iguais.

Na **teoria dos subconjuntos**, por sua vez, imagine que você está olhando somente para a caixa A. Pode-se dizer que a caixa A é um subconjunto de si mesma, pois todos os brinquedos que estão na caixa A, logicamente, a pertecem. Embora pareça óbvio, esse é o motivo pelo qual denomina-se subconjunto impróprio, uma vez que todos os elementos do conjunto original são incluídos, sem exceção. Portanto, a caixa A é um subconjunto de si mesma, o que não é algo novo ou interessante, pois todo conjunto é sempre um subconjunto de si mesmo.

CONJUNTO DAS PARTES OU PARTIÇÃO

Dado um conjunto A, o conjunto das partes de A, também chamado de partição de A, é o conjunto que contém todos os subconjuntos possíveis de A. Esse conjunto é representado pela notação P(A).

A notação utilizada nesse contexto é a seguinte: $P(A) = \{x/x \subset A\}$, em que X é subconjunto de A. Lê-se: X é tal que X está contido em A. A notação, portanto, está dizendo que P(A) é o conjunto que contém todos os subconjuntos possíveis de A. Isso significa que P(A) inclui qualquer grupo de elementos que podem ser formados a partir de A. Qualquer subconjunto x de A pertence a P(A). Em outras palavras, P(A) é a coleção de todos os subconjuntos que podem ser formados com os elementos de A.

Por meio do conjunto das partes de um determinado conjunto A, pode-se reforçar o que talvez já tenha sido percebido intuitivamente: um conjunto pode ser elemento de outro conjunto.

Antes de apresentar um exemplo que ilustre essa situação, é importante destacar uma propriedade fundamental: o número de elementos de P(A) é dado por 2^n, em que n é o número de elementos do conjunto A.

Exemplo 1: determine o conjunto das partes de B = {1, 2, 3, 4}.

- Resposta:

$$P(B)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\},\emptyset\}$$

Observe que todos os subconjuntos do conjunto B, ou seja, P(B), foram representados. Atente para os elementos {1, 2, 3, 4}: trata-se do próprio conjunto B, já que todo conjunto está contido em si mesmo. Além disso, ∅ (o conjunto vazio) está contido em qualquer conjunto.

Observe também que a quantidade de elementos é dada por $2^n = 2^4 = 16$ subconjuntos.

Exemplo 2: determine o conjunto das partes de C = {1, 2, 3};

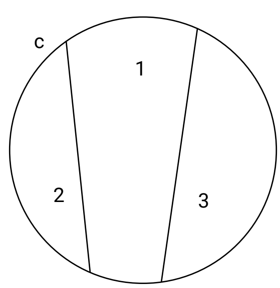
- Resposta:

$$P(C)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\emptyset\}$$

Observe que todos os subconjuntos do conjunto C, ou seja, P(C), foram representados. Atenção especial deve ser dada aos elementos, que aqui são conjuntos, {1, 2, 3} (perceba que é o próprio conjunto C, pois todo conjunto está contido nele mesmo) e ∅ (o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto).

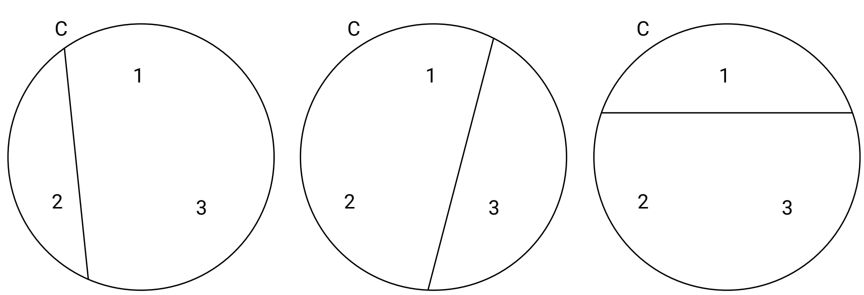
Observe também que a quantidade de elementos é dada por $2^n = 2^3 = 8$ subconjuntos.

Vamos utilizar diagramas para entender melhor a importância da partição do conjunto C:



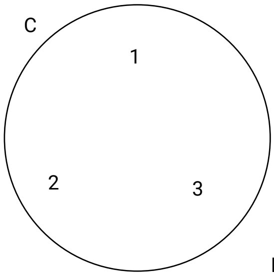
Partição do conjunto C, com elementos tomados 1 a 1.

Situação que apresenta cada um dos elementos de C tomados 1 a 1, ou seja, 3 subconjuntos aparecem claramente separados: {1}, {2} e {3}.



Partições do conjunto C, com elementos tomados 2 a 2.

A situação anterior apresenta cada um dos elementos de C tomados 2 a 2, ou seja, 3 subconjuntos aparecem claramente separados: {1, 3}, {1, 2}, {2, 3}. Vale ressaltar a observação referente à repetição de elementos na teoria de conjuntos: os elementos {1}, {2} e {3} já apareceram na primeira situação abordada nesse exemplo, portanto, não serão considerados novamente.



Partição do conjunto C, com elementos tomados 3 a 3

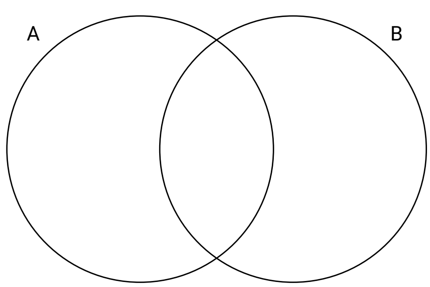
Situação que apresenta o próprio conjunto C tomado 3 a 3, ou seja, 1 subconjunto aparece claramente: {1, 2, 3}. Perceba que aqui vale a observação referente ao fato de que todo conjunto está contido nele mesmo.

UNIÃO OU REUNIÃO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, chama-se união de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou B (disjunção lógica).

A notação utilizada nesse contexto é a seguinte: $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Lê-se: os elementos do conjunto A união com B são representados por x, tal que x pertence a A ou x pertence a B. Simplificando, a notação indica que A ∪ B é o conjunto que inclui todos os elementos que estão em A, em B ou em ambos. Isso significa que, se você escolher qualquer elemento x, ele estará em A ∪ B se pertencer a A ou a B. Ou seja, A ∪ B é formado por todos os elementos que pertencem a A, a B ou a ambos os conjuntos.

Por diagramas, poderíamos representar essa situação da seguinte maneira:



União dos conjuntos A e B.

Perceba que os elementos pertencentes ao conjunto A ∪ B (A união com B) são aqueles que pertencem exclusivamente a A, unidos aos que pertencem exclusivamente a B, juntamente com os que pertencem à interseção de A e B (como veremos a seguir).

É dessa maneira que representamos, por meio de diagramas, a relação de disjunção lógica A ∪ B.

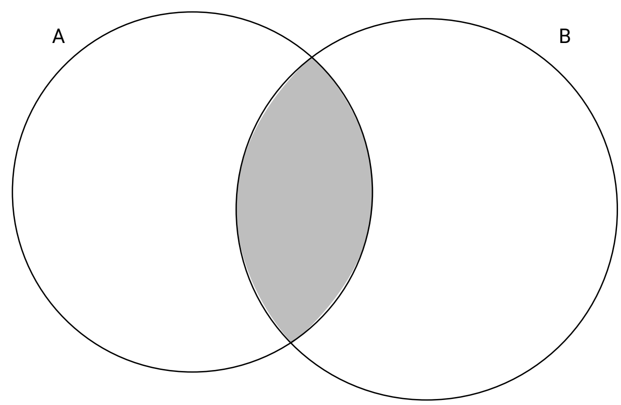
INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, chama-se intersecção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B (conjunção lógica).

A notação utilizada nesse contexto é a seguinte: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ e } x \in B\}$. Lê-se: os elementos do conjunto A intersecção com B são representados por x, tal que x pertence a A e x pertence a B.

Sobre a notação apresentada, também é possível interpretá-la de outra forma, reconhecendo que A ∩ B é o conjunto que contém apenas os elementos que estão simultaneamente em A e em B. Isso significa que, se você escolher qualquer elemento x, ele estará em A ∩ B somente se fizer parte tanto de A quanto de B. Em outras palavras, A ∩ B é formado pelos elementos comuns a ambos os conjuntos.

Por meio de diagramas, poderíamos representar essa situação da seguinte maneira:

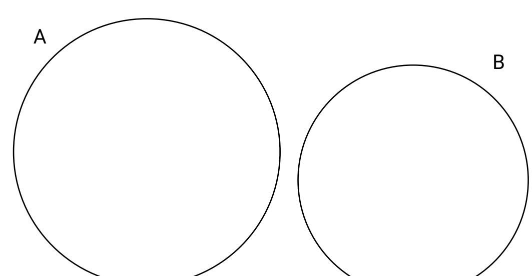


Intersecção dos conjuntos A e B.

Perceba que os elementos pertencentes ao conjunto A ∩ B (A intersecção com B) são aqueles que pertencem a A e a B simultaneamente.

Dica

Existe uma diferença entre **conjuntos disjuntos** (intersecção vazia) e **conjuntos intersecantes** (intersecção não vazia). Anteriormente, por meio de diagramas, representamos dois conjuntos A e B intersecantes. Veja na figura a seguir como devemos representar **conjuntos disjuntos**.



Conjuntos A e B disjuntos.

Após a apresentação das operações de união e intersecção entre dois ou mais conjuntos, que podem ser facilmente estendidas para três ou quatro conjuntos, um princípio fundamental para evitar a contagem excessiva de elementos em qualquer conjunto é o **princípio da inclusão-exclusão**.