Prefeitura Municipal de Petrolina - PE

Professor de Anos Finais do Ensino Fundamental – Matemática

NV-018OT-25-PREF-PETROLINA-PE-PRO-MAT
Cód.: 7908428814250

SUMÁRIO

CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS

ARITMÉTICA E CONJUNTOS: OS CONJUNTOS NUMÉRICOS (NATURAIS, INTEIROS, RACIONAIS, IRRACIONAIS E REAIS)

OPERAÇÕES BÁSICAS, PROPRIEDADES, DIVISIBILIDADE E PROPORCIONALIDADE

Naturais

Os números construídos com os algarismos de 0 a 9 são chamados de naturais. O símbolo desse conjunto é a letra N, e podemos escrever os seus elementos entre chaves:

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...}

As reticências indicam que esse conjunto tem infinitos números naturais.

O zero não é um número natural propriamente dito, pois não é um número de "contagem natural". Por isso, utiliza-se o símbolo N* para designar os números naturais positivos, isto é, excluindo o zero. Veja: N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...}.

Dica

O símbolo do conjunto dos **números naturais** é a **letra N**. Além disso, podemos encontrar o **símbolo N***, que representa os números **naturais positivos**, isto é, **excluindo o zero**.

Conceitos básicos relacionados aos números naturais:

- **Sucessor**: é o próximo número natural. Ou seja, o sucessor do número "n" é o número "n+1".
  - **Exemplo**: o sucessor de 4 é 5, e o sucessor de 51 é 52.
- **Antecessor**: é o número natural anterior. Ou seja, o antecessor do número "n" é o número "n–1".
  - **Exemplo**: o antecessor de 8 é 7, e o antecessor de 77 é 76.
- **Números consecutivos**: são números em sequência. Assim, (n – 1, n e n+1) são números consecutivos.
  - **Exemplo**: 5, 6, 7 são números consecutivos, enquanto 10, 9, 11 não são.
- **Números naturais pares**: são aqueles que, quando divididos por 2, não deixam resto. Por isso, o zero também é considerado par. Assim, todos os números que terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8 são pares;
- **Números naturais ímpares**: quando divididos por 2, deixam resto 1. Todos os números que terminam em 1, 3, 5, 7 ou 9 são ímpares.

Atenção! A soma ou subtração de dois números pares tem resultado par.

- Ex.: 12 + 8 = 20; 12 – 8 = 4.

A soma ou subtração de dois números ímpares tem resultado par.

- Ex.: 13 + 7 = 20; 13 – 7 = 6.

A soma ou subtração de um número par com outro ímpar tem resultado ímpar.

- Ex.: 14 + 5 = 19; 14 – 5 = 9.

A multiplicação de números pares tem resultado par.

- Ex.: 8 · 6 = 48.

A multiplicação de números ímpares tem resultado ímpar.

- Ex.: 3 · 7 = 21.

A multiplicação de um número par por um número ímpar tem resultado par.

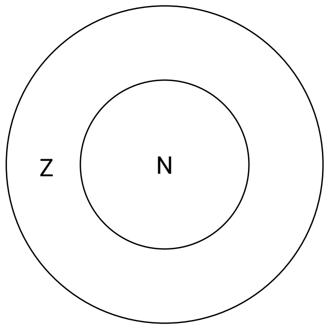
- Ex.: 4 · 5 = 20.

INTEIROS

Os números inteiros são os números naturais — incluindo o zero — e seus respectivos opostos (negativos). Veja:

Z = {... –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}

O símbolo desse conjunto é a letra Z. Uma coisa importante é saber que todos os números naturais são inteiros, mas nem todos os números inteiros são naturais. Podemos representar os números inteiros por meio de diagramas e afirmar que o conjunto de números naturais está contido no conjunto de números inteiros, ou que N é um subconjunto de Z. Observe:



Podemos destacar alguns subconjuntos de números. Veja:

- **Números inteiros não negativos** ($\mathbb{Z}^+$) = {0, 1, 2, 3...}. Veja que estes são os números naturais;
- **Números inteiros não positivos** ($\mathbb{Z}^-$) = {... -3, -2, -1, 0}. Veja que o zero também faz parte deste conjunto, pois ele não é positivo nem negativo;
- **Números inteiros negativos** = {... –3, –2, –1}. O zero não faz parte;
- **Números inteiros positivos** = {1, 2, 3...}. Novamente, o zero não faz parte.

Operações com Números Inteiros

Há quatro operações básicas na matemática: adição, subtração, multiplicação e divisão. Essas operações são fundamentais para realizarmos cálculos em praticamente todas as questões de matemática. Por isso, é importante entendê-las bem. Vejamos cada uma delas.

- **Adição**

É dada pela soma de dois números positivos ou dois números negativos. Ou seja, a adição de 20 e 5 é: 20 + 5 = 25.

Siga os outros exemplos:

$$8 + 7 = 15$$
$$-4 - 6 = -10$$

É possível somar números de outra forma: escrevendo um abaixo do outro. Vejamos como ocorre a soma de 105 + 55:

$$\begin{array}{r} 105 \\ +\ \ 55 \\ \hline 160 \end{array}$$

- **Propriedades da Adição**

As propriedades da operação de adição precisam ser destacadas, de modo que se iniciam na forma **comutativa**, quando a ordem dos números não altera a soma. Observe:

115 + 35 é igual a 35 + 115

Outra propriedade é a **associativa**, que se refere à adição de três ou mais números. Ela permite somar dois deles primeiro e, em seguida, adicionar o terceiro, em qualquer ordem, sempre obtendo o mesmo resultado.

$$2 + 3 + 5 = (2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5) = 10$$

O **elemento neutro** refere-se à propriedade do zero na adição, já que qualquer número somado a zero permanece igual a si mesmo.

$$27 + 0 = 27; 55 + 0 = 55$$

Por fim, a última propriedade é o **fechamento**, que estabelece que a soma de dois números inteiros sempre resulta em outro número inteiro. Exemplo: a soma dos números inteiros 8 e 2 gera o número inteiro 10, pois 8 + 2 = 10.

- **Subtração**

Subtrair dois números equivale a diminuir o valor de um pelo outro, como somar um número negativo a um número positivo. Por exemplo, subtrair 7 de 20 significa retirar 7 de 20, restando 13, o que pode ser expresso como: 20 – 7 = 13. Vejamos mais alguns exemplos:

- subtrair 5 de 16: 16 – 5 = 11;
- 30 subtraído de 10: 30 – 10 = 20.

Ainda, a sua representação pode ser vertical, como exprime o exemplo:

$$\begin{array}{r} 90\ - \\ 30\ \ \\ \hline 60\ \ \end{array}$$

Atenção! A soma de números com sinais iguais constitui adição, e a soma de números com sinais opostos constitui subtração.

- **Propriedades da Subtração**

Inicialmente, é preciso ressaltar a ausência de **comutatividade e associação**, pois, como a ordem dos números altera o resultado, a subtração de números não tem a propriedade comutativa, tampouco a associativa.

$$250 - 120 = 130 \text{ e } 120 - 250 = -130$$

O zero é, também, o **elemento neutro da subtração**, uma vez que, ao subtrair zero de qualquer número, este número permanecerá inalterado.

$$13 - 0 = 13$$

A propriedade do fechamento ocorre quando a subtração de dois números inteiros é responsável por gerar, sempre, outro número inteiro.

$$33 - 10 = 23$$

- **Multiplicação**

A multiplicação funciona como uma repetição de adições. Veja: a multiplicação 20 · 3 equivale à soma do número 20 repetido 3 vezes (20 + 20 + 20) ou à soma do número 3 repetido 20 vezes (3 + 3 + 3 + ... + 3).

Além disso, a multiplicação segue uma regra de sinais: quando os números têm o **mesmo sinal**, o resultado é **positivo**; quando têm **sinais diferentes**, o resultado é **negativo**.

$$51 \cdot 2 = 102$$
$$(-33) \cdot (-3) = 99$$
$$25 \cdot (-4) = -100$$
$$(-15) \cdot 5 = -75$$

Observe a regra de sinais na tabela a seguir facilitar seu entendimento:

SINAIS NA MULTIPLICAÇÃO		
Operações		**Resultados**
+	+	+
–	–	+
+	–	–
–	+	–

- **Propriedades da Multiplicação**

A propriedade **comutativa** de A · B é igual a B · A, ou seja, a ordem não altera o resultado.

$$8 \cdot 5 = 5 \cdot 8 = 40$$

A **propriedade associativa** afirma que, ao multiplicar ou somar três ou mais números, a maneira como eles são agrupados não altera o resultado. Por exemplo, para três números A, B e C: (A · B) · C = A · (B · C). Isso significa que não importa se multiplicarmos A com B primeiro e depois com C, ou B com C primeiro e, em seguida, com A, o resultado será sempre o mesmo.

$$(3 \cdot 4) \cdot 2 = 3 \cdot (4 \cdot 2) = (3 \cdot 2) \cdot 4 = 24$$

O número 1, também conhecido como unidade, é o elemento neutro da multiplicação, pois, ao multiplicar 1 por qualquer número, o resultado será sempre o próprio número, permanecendo inalterado.

$$15 \cdot 1 = 15$$

A propriedade do fechamento estabelece que a multiplicação de dois números inteiros sempre resulta em outro número inteiro.

$$9 \cdot 5 = 45$$

Por outro lado, a propriedade distributiva é exclusiva da multiplicação. Ela permite que um número seja multiplicado por uma soma, distribuindo a multiplicação para cada termo dentro dos parênteses e, em seguida, somando os resultados. Veja como fica: A · (B + C) = (A · B) + (A · C).

$$3 \cdot (5 + 7) = 3 \cdot (12) = 36$$

- **Divisão**

Quando dividimos A por B, estamos repartindo a quantidade A em B partes de mesmo valor. Por exemplo, ao dividir 50 por 10, queremos dividir 50 em 10 partes iguais. Nesse caso, cada parte terá 5 unidades, pois 10 · 5 = 50. Alternativamente, podemos somar 5 unidades 10 vezes consecutivas: 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 50.

Quando dividimos 50 por 10, dizemos que 50 é o dividendo e 10 é o divisor. O resultado dessa divisão é o quociente. Vejamos um exemplo: ao dividir 54 por 10, temos 54 como dividendo, 10 como divisor, 5 como quociente e 4 como resto.

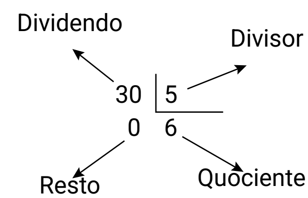
Assim como na multiplicação, a regra de sinais na divisão também é fundamental e deve ser lembrada. Observe a tabela a seguir:

SINAIS NA DIVISÃO		
Operações		**Resultados**
+	+	+
–	–	+
+	–	–
–	+	–

Atenção!

- A divisão de números de mesmo sinal tem resultado positivo. Ex.: 60 ÷ 3 = 20; (–45) ÷ (–15) = 3;
- A divisão de números de sinais diferentes tem resultado negativo. Ex.: 25 ÷ (–5) = –5; (–120) ÷ 5 = –24.

Um dos métodos mais comuns para realizar a divisão é o método da chave. Nele, posicionamos o divisor dentro de uma “chave” e o dividendo ao lado, como mostrado no exemplo a seguir:



Dividendo = Divisor · Quociente + Resto
30 = 5 · 6 + 0

- **Propriedades da Divisão**

As propriedades das operações de divisão exigem maior atenção, pois a divisão **não** tem as **propriedades comutativa e associativa**. Em relação à propriedade de fechamento, há uma particularidade: ao dividir números inteiros, o resultado pode ser um número fracionário ou decimal, o que demonstra a ausência de fechamento para os números inteiros.

Ex.: 2 ÷ 10 = 0,2 (não pertence ao conjunto dos números inteiros).

Por outro lado, o **elemento neutro** da divisão, assim como na multiplicação, é a unidade, já que ao dividir qualquer número por 1, o resultado é o próprio número.

Ex.: 15 ÷ 1 = 15.

RACIONAIS

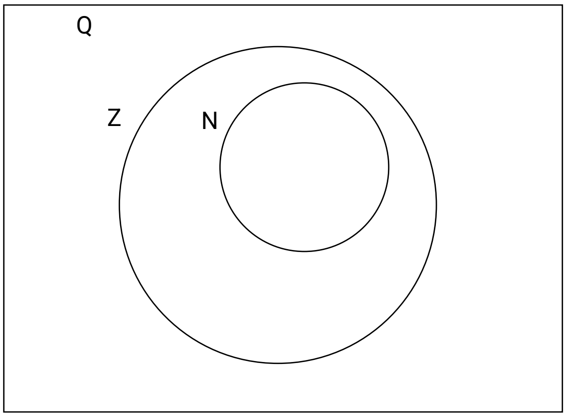
Conjuntos numéricos racionais são aqueles que podem ser escritos na forma da divisão (fração) de dois números inteiros — ou seja, escritos na forma A/B (lê-se A dividido por B), em que A e B são números inteiros.

Exemplos: 7/4 e –15/9 são racionais.

Observe, também, que os números 87,321 e 1,221 são racionais, pois são divisíveis pelo número 1.

> **Importante!**
> Todo número natural é também um número inteiro, e todo número inteiro é também um número racional.

O símbolo desse conjunto é a letra Q. Pode-se representar, por meio de diagramas, a relação entre os conjuntos naturais, inteiros e racionais. Veja:



As formas de representação de um número racional ocorrem das seguintes maneiras:

- **Frações**: $\frac{p}{q}$, com q ≠0;
- **Decimais finitos**: 0,3;
- **Decimais infinitos** (também conhecidos como **dízimas periódicas**): 0,33333...

Operações com Números Racionais

As operações com os números racionais são divididas entre decimais e frações.

- **Operações com Números Decimais**

As operações com números decimais são realizadas da mesma forma que as operações com números inteiros, com a diferença de que é necessário respeitar o posicionamento da vírgula. Vejamos um exemplo:

- **Adição e Subtração com Números Decimais**

0,2 + 0,9 = 1,1
0,3 – 0,2 = 0,1

- **Multiplicação com Números Decimais**

Para multiplicarmos números decimais, devemos posicionar um número abaixo do outro e realizar a multiplicação normalmente, desconsiderando as vírgulas inicialmente. Vejamos o exemplo 0,3 · 0,3:

$$\begin{array}{r} 0{,}3 \times \\ 0{,}3 \\ \hline +\ 0\,9 \\ 0\,0 \\ \hline 0\,0\,9 \end{array}$$

Agora, para posicionar a vírgula, contamos a quantidade de casas decimais que temos após a vírgula em cada um dos números. Como em 0,3 há apenas 1 casa decimal, devemos somar 2 casas (1 + 1) e posicionar a vírgula no lugar correto. Assim, 0,3 · 0,3 = 0,09.

$$\begin{array}{r} 0{,}3 \times \\ 0{,}3 \\ \hline +\ 0\,9 \\ 0\,0 \\ \hline 0{,}0\,9 \end{array}$$

- **Divisão de Números Decimais**

A divisão de números decimais ocorre por meio da multiplicação do dividendo e do divisor por múltiplos de 10 até que a vírgula deixe de pertencer a ambos. Veja um exemplo:

7,124 ÷ 0,21

Multiplicaremos os dois lados por 1000 (ou 10^3) até que a vírgula deixe de pertencer ao divisor:

Assim, 7.124 · 210

Agora, realizaremos a divisão do mesmo modo que aprendemos para a divisão de números inteiros.

7.124 · 210 = 33,9238...

Operações com Frações

Frações nada mais são do que operações de divisão. Podemos, por exemplo, escrever 4 ÷ 8, como $\frac{4}{8}$.

Neste tópico, veremos todas as operações que envolvem as frações, quais sejam: a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão.

- **Adição ou Subtração de Fração**

Para somar ou subtrair frações, é necessário ater-se, principalmente, aos denominadores, ou seja, à "base" das frações. Vejamos duas situações possíveis:

- Denominadores iguais (nessa situação, basta repetir as bases e operar os numeradores):

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{4-2}{3}=\frac{2}{3}$$

- Denominadores diferentes (nessa situação, é preciso achar o denominador comum, a fim de realizar a operação das frações):

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}$$

Note que o número 12 é o primeiro múltiplo, ao mesmo tempo, de 3 e 4. Cada um desses denominadores deverá ser dividido por 12 e, depois, deve-se multiplicar o resultado pelos numeradores.

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{4\times 1}{12}+\frac{3\times 3}{12}=$$

$$\frac{4}{12}+\frac{9}{12}=\frac{4+9}{12}=\frac{13}{12}$$

Atenção! Para achar o menor denominador comum, devemos encontrar o MMC entre esses números.

$$\begin{array}{c|c} 3-4 & 2 \\ 3-2 & 2 \\ 3-1 & 3 \\ \hline 1-1 & \end{array}$$

(aqui, divide-se sempre pelo menor número primo possível)

MMC: 2 · 2 · 3 = 12.

Importante!

Todo número que é dividido apenas por ele mesmo e pelo número 1 é um número primo. Exemplos:
• 3: apenas pode ser dividido por 1 e 3;
• 13: apenas pode ser dividido por 1 e 13.

- **Multiplicação de Frações**

Realizar a multiplicação entre frações é muito simples: basta multiplicar os numeradores entre eles e, em seguida, os denominadores entre eles também. Veja:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}=\frac{10}{12}$$

Perceba que não chegamos ao resultado final da operação, pois é necessário, ainda, simplificar a fração o máximo possível. Para realizar esse procedimento, deve-se achar um número que divide, ao mesmo tempo, o denominador e o numerador. No exemplo dado, sabemos que é o número 2. Vejamos:

$$\frac{10\div 2}{12\div 2}=\frac{5}{6}$$

Assim, chegamos no resultado final, pois não há mais como simplificar.

- **Divisão de Frações**

Para dividir frações, basta repetir a primeira fração e multiplicá-la pelo inverso da segunda fração. Depois, realiza-se a multiplicação normalmente, da mesma forma que aprendemos. Veja:

$$\frac{3}{4}\div\frac{5}{2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 5}=\frac{6}{20}$$

Pode-se simplificar frações, dividindo o numerador e o denominador pelo mesmo número.

$$\frac{6}{20}=\frac{6\div 2}{20\div 2}=\frac{3}{10}$$

Revise seus conhecimentos por meio dos exercícios comentados a seguir.

1. (FGV — 2010) Julgue as afirmativas a seguir:

a) 0,555... é um número racional.

( ) CERTO ( ) ERRADO

Repare que o número 0,555... é uma dízima periódica. Na teoria, aprendemos que as dízimas periódicas são um tipo de número racional. Resposta: Certo.

b) Todo número inteiro tem antecessor.

( ) CERTO ( ) ERRADO

É possível obter o antecessor de qualquer número inteiro: basta subtrair 1 unidade. Veja: o antecessor de 35 é o 34; o antecessor de 0 é –1; o antecessor de –299 é o –300. Resposta: Certo.

2. (FCC — 2017) Sabendo que o número decimal F é 0,8666 ..., que o número decimal G é 0,7111 ... e que o número decimal H é 0,4222 ..., então, o triplo da soma desses três números decimais, F, G e H, é igual a

a) 6,111 ...
b) 5,888 ...
c) 6.
d) 3.
e) 5,98.

Podemos resolver de forma aproximada, somando: 0,8666 + 0,7111 + 0,4222 = 1,9999 (aproximadamente 2)
A soma é, aproximadamente, 3 · 2 = 6. Resposta: Letra C.

3. (FCC — 2018) Os canos de PVC são classificados de acordo com a medida de seu diâmetro em polegadas. Dentre as alternativas, aquela que indica o cano de maior diâmetro é

a) 1/2.
b) 1 ¼.
c) 3/4.
d) 1 ½.
e) 5/8.

Passaremos todos os números para sua forma decimal, ou seja, dividiremos o numerador pelo denominador da fração. Veja:
5/8 = 0,625
½ = 0,5
1 ¼ = 1 + 0,25 = 1,25
¾ = 0,75
1 ½ = 1 + 0,5 = 1,5
Logo, o maior diâmetro será 1 ½ polegadas, que corresponde a 1,5 polegadas. Resposta: Letra D.

IRRACIONAIS

O conjunto dos números irracionais são os números decimais infinitos e não periódicos, ou seja, aqueles que não podem ser representados por meio de frações irredutíveis. Em outras palavras, eles não podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$, em que p e q são números inteiros e q ≠ 0. Vejamos alguns exemplos clássicos de números irracionais: