

Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais

SEE-MG

Professor de Educação Básica (PEB) – Matemática

SUMÁRIO

LÍNGUA PORTUGUESA.....	11
■ TEXTOS	11
INTERPRETAÇÃO E COMPREENSÃO DE TEXTOS.....	11
■ LÍNGUA E LINGUAGEM	13
AS FUNÇÕES DA LINGUAGEM	13
Gênero Poético.....	14
TEXTO NARRATIVO	14
TEXTO DESCRITIVO	15
TEXTO DISSERTATIVO	16
DISCURSO DIRETO, INDIRETO E INDIRETO LIVRE	16
AS FIGURAS DE LINGUAGEM.....	17
■ FONÉTICA – FONOLOGIA	21
FONEMAS.....	21
VOGAIS, CONSOANTES E SEMIVOGAIS, ENCONTROS VOCÁLICOS, CONSONANTAIS, DÍGRAFOS E SÍLABAS	21
ORTOGRAFIA	21
NÚMERO DE SÍLABAS	22
DIVISÃO SILÁBICA	22
ACENTUAÇÃO GRÁFICA	23
CORREÇÃO ORTOGRÁFICA	23
■ MORFOLOGIA: ESTRUTURA E FORMAÇÃO DE PALAVRAS.....	23
MORFEMAS E AFIKOS.....	24
PROCESSOS DE FORMAÇÃO DE PALAVRAS.....	25
■ CLASSES GRAMATICAIS: IDENTIFICAÇÃO, CLASSIFICAÇÕES E EMPREGO	27
■ SINTAXE	47
FRASE, ORAÇÃO E PERÍODO.....	47
PERÍODO SIMPLES – TERMOS DA ORAÇÃO: IDENTIFICAÇÃO, CLASSIFICAÇÕES E EMPREGO	48
■ LITERATURA	53

DENOTAÇÃO E CONOTAÇÃO	53
CONCEITUAÇÃO DE TEXTO LITERÁRIO.....	53
GÊNEROS LITERÁRIOS.....	55
A EVOLUÇÃO DA ARTE LITERÁRIA, EM PORTUGAL E NO BRASIL	56
PERIODIZAÇÃO DA LITERATURA BRASILEIRA: ESTUDO DOS PRINCIPAIS AUTORES DOS ESTILOS DE ÉPOCA.....	57
REDAÇÃO DISCURSIVA.....	87
■ REDAÇÃO DISCURSIVA	87
MATEMÁTICA APLICADA.....	115
■ NÚMEROS E OPERAÇÕES: CÁLCULO ARITMÉTICO.....	115
PORCENTAGENS	121
ACRÉSCIMOS E DESCONTOS	123
■ ÁLGEBRA E FUNÇÕES.....	123
PROPORCIONALIDADE - GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS E GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS.....	125
SEQUÊNCIAS E RACIOCÍNIO LÓGICO	127
■ GRANDEZAS E MEDIDAS.....	132
ÁREAS E PERÍMETROS DE FIGURAS PLANAS	132
■ PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA.....	135
TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO, LEITURA E REPRESENTAÇÃO DA INFORMAÇÃO EM GRÁFICOS, TABELAS E PICTOGRAMAS.....	135
MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL	139
DIREITOS HUMANOS.....	145
■ LEI FEDERAL Nº 13.146 DE 6 DE JULHO DE 2015: INSTITUI A LEI BRASILEIRA DE INCLUSÃO DA PESSOA COM DEFICIÊNCIA (ESTATUTO DA PESSOA COM DEFICIÊNCIA).....	145
■ LEI FEDERAL Nº 10.741 DE 1º DE OUTUBRO DE 2003: DISPÕE SOBRE O ESTATUTO DA PESSOA IDOSA E DÁ OUTRAS PROVIDÊNCIAS.....	166
■ LEI FEDERAL Nº 8.069 DE 13 DE JULHO DE 1990: DISPÕE SOBRE O ESTATUTO DA CRIANÇA E DO ADOLESCENTE E DÁ OUTRAS PROVIDÊNCIAS.....	188

■ DECLARAÇÃO DE SALAMANCA: SOBRE PRINCÍPIOS, POLÍTICAS E PRÁTICAS NA ÁREA DAS NECESSIDADES EDUCATIVAS ESPECIAIS.....	241
■ DECLARAÇÃO UNIVERSAL DOS DIREITOS HUMANOS	243
■ CARTILHA ENFRENTAMENTO AO ASSÉDIO SEXUAL NAS ESCOLAS ESTADUAIS DE MINAS GERAIS	252
CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS.....	257
■ NÚMEROS E OPERAÇÕES: COMPLEXOS.....	257
■ MATEMÁTICA FINANCEIRA.....	265
■ ÁLGEBRA E FUNÇÕES.....	269
POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS.....	269
EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES: EXPONENCIAIS, LOGARÍTMICAS, TRIGONOMÉTRICAS E MODULARES	270
■ SISTEMAS LINEARES, MATRIZES E DETERMINANTES.....	274
■ FUNÇÕES	289
AFIM	291
QUADRÁTICA	293
FUNÇÃO POLINOMIAL	294
FUNÇÃO EXPONENCIAL.....	296
FUNÇÃO LOGARÍTMICA.....	296
FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA	297
FUNÇÃO MODULAR.....	302
■ GRANDEZAS E MEDIDAS.....	303
MEDIDAS DE COMPRIMENTO.....	304
MEDIDAS DE ÁREAS	304
MEDIDAS DE VOLUMES.....	304
MEDIDAS DE TEMPO	304
MEDIDAS DE ÂNGULOS.....	304
MEDIDAS DE MASSA.....	305
MEDIDAS DE TEMPERATURA	305
MEDIDAS DE VELOCIDADE E ACELERAÇÃO	305

MEDIDAS DA INFORMÁTICA	306
MEDIDAS DE ENERGIA	306
■ ESPAÇO E FORMA	308
GEOMETRIA ESPACIAL	308
■ GEOMETRIA ANALÍTICA	315
■ NOÇÕES BÁSICAS DE GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS	332
■ TRIGONOMETRIA: RELAÇÕES MÉTRICAS E TRIGONOMÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS	334
CICLO TRIGONOMÉTRICO	339
■ PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	339
TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO: CÁLCULO COMBINATÓRIO	339
PROBABILIDADES	343
■ A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	350
MODELAGEM MATEMÁTICA	351
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	351
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	352
JOGOS E ENSINO DE MATEMÁTICA	355
ETNOMATEMÁTICA	356
TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA	356
■ HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO	357
CONCEPÇÕES TEÓRICAS DE EDUCAÇÃO, MUNDO, HOMEM E ESCOLA, FUNÇÃO SOCIAL DA EDUCAÇÃO ESCOLAR	358
TRABALHO COMO PRINCÍPIO EDUCATIVO	359
REFERÊNCIAS	360
PESQUISA COMO PRINCÍPIO PEDAGÓGICO	360
■ TENDÊNCIAS PEDAGÓGICAS	361
RECURSOS DIDÁTICOS	361
PROCEDIMENTOS DIDÁTICOS	362
PLANEJAMENTO DO ENSINO	362
TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E DA COMUNICAÇÃO NO TRABALHO PEDAGÓGICO	363
AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM	364

RELAÇÃO PROFESSOR E ALUNO	364
■ CURRÍCULO INTEGRADO: EDUCAÇÃO INCLUSIVA	365
VALORIZAÇÃO DAS DIFERENÇAS INDIVIDUAIS DE GÊNERO, ÉTNICAS E SOCIOCULTURAIS COMO PROCESSOS DE ENFRENTAMENTO À DESIGUALDADE	366
■ GESTÃO ESCOLAR DEMOCRÁTICA E PARTICIPATIVA	367
RELAÇÃO ESCOLAR INTERNA E COM A COMUNIDADE	367

CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS

Caro aluno,

Os assuntos listados a seguir não estarão presentes nesta matéria, pois já foram abarcados na disciplina “Matemática Aplicada”. Portanto, optamos por não repeti-los aqui.

- Conjuntos Numéricos e Operações: Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais e Reais;
- Cálculo Aritmético;
- Proporcionalidade
- Sequências
- Geometria Plana
- Noções de Estatística: Leitura e Representação da informação em Gráficos, Tabelas e Pictogramas e Medidas de tendência central e de dispersão

Cordialmente,
Nova Concursos.

NÚMEROS E OPERAÇÕES: COMPLEXOS

REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Definição de Número Complexo

Podemos denominar como números complexos aqueles que podem ser escritos na forma $z = a + bi$.

Dessa forma, a e b fazem parte do conjunto dos números reais, mas a é a parte real do número e b é a parte imaginária, uma vez que b é multiplicado pela unidade imaginária i de valor $\sqrt{-1}$. Isto é:

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ i = \sqrt{-1} \end{cases}$$

Número Imaginário

O número imaginário ocorre quando a parte real e a parte imaginária são diferentes de zero, isto é, são não nulas. Veja alguns exemplos:

$$\begin{aligned} z_a &= 2 + 5i \\ z_b &= 9 + 7i \\ z_c &= -1 + 3i \\ z_d &= 6 - 2i \end{aligned}$$

Número Imaginário Puro

O número imaginário puro ocorre quando a parte real é igual a zero, ou seja, a parte real é nula. Assim, o número complexo será formado apenas pela parte imaginária. Veja alguns exemplos:

$$\begin{aligned} z_a &= 41i \\ z_b &= -7i \\ z_c &= i \\ z_d &= 2i \end{aligned}$$

Número Real

O número real ocorre quando a parte imaginária é igual a zero, ou seja, a parte imaginária é nula, restando apenas a parte real de um número complexo. Veja alguns exemplos:

$$\begin{aligned} z_a &= 45 \\ z_b &= 0,33 \\ z_c &= -68 \\ z_d &= 0,125 \end{aligned}$$

Potências de i

Sendo $i = \sqrt{-1}$, podemos construir as seguintes relações para as **potências de i** :

$$\begin{cases} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\ i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1 \\ i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \end{cases}$$

Importante!

Observe que **a cada quatro potências os resultados se repetem**, ou seja, as potências de i são cíclicas.

Como consequência dessa repetição, podemos concluir que só existem quatro valores possíveis para as potências de i :

$$i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i$$

Assim, para encontrar qualquer valor de uma potência de i , basta dividir o expoente da potência e analisar o resto da divisão, que será o novo expoente do número i . Vejamos o exemplo com a potência i^{584} . O expoente 584 é um número que, ao ser dividido por 4, tem resto 0, assim, teremos i^0 , ou seja, 1.

Acompanhe outro exemplo para fixar o conteúdo: i^{75} .

Fazendo a divisão do expoente de i pelo método da chave, temos:

$$\begin{array}{r} 75 \overline{) 4} \\ 3 \quad 18 \end{array}$$

Como o resto da divisão foi 3, teremos que $i^{75} = i^3$, ou seja, $-i$.

Igualdade de Números Complexos

Dois números complexos serão **iguais** se, e somente se, suas partes reais e imaginárias também forem iguais, ou seja:

$$\begin{cases} Z_1 = a_1 + b_1 i & \text{e } Z_2 = a_2 + b_2 i \\ Z_1 = Z_2 \iff a_1 = a_2 \text{ e } b_1 = b_2 \end{cases}$$

Acompanhe o exemplo: Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = -9 + 4i$, determine o valor de a e b , sabendo que $z_1 = z_2$.

Sabemos que $z_1 = z_2$, então $a + bi = -9 + 4i$ e, por consequência, $a = -9$ e $b = 4$.

Conjugado de um Número Complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, chamamos de “**conjugado de z** ” o complexo $\bar{z}$, tal que: $\bar{z} = a - bi$. O conjugado é de extrema importância para cálculos envolvendo números complexos. Observe que o conjugado inverte o sinal somente da parte imaginária, portanto, se um número complexo tiver b igual a 0, o sinal da parte real não muda, ou seja, o número e o seu conjugado serão iguais.

Para compreender melhor, vamos encontrar juntos o conjugado do número complexo $z = 5 - 2i$. Como se trata de um conjugado, temos que $\bar{z} = 5 - (-2i)$, isto é, $\bar{z} = 5 + 2i$.

Veja outros exemplos:

$$\begin{aligned} z = 1 + 9i &\Rightarrow \bar{z} = 1 - 9i \\ z = i &\Rightarrow \bar{z} = -i \\ z = 7 &\Rightarrow \bar{z} = 7 \end{aligned}$$

Propriedades do Conjugado de um Número Complexo

Para todo $z \in \mathbb{C}$, temos:

$$\begin{aligned} \text{P1)} \quad z + \bar{z} &= (a + bi) + (a - bi) = a + bi + a - bi = 2 \cdot a = 2 \cdot \text{Re}(z) \\ \text{P2)} \quad z - \bar{z} &= (a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi = 2 \cdot bi = 2 \cdot \text{Im}(z) \cdot i \\ \text{P3)} \quad z = \bar{\bar{z}} &\iff z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Conjugado da Soma e do Produto

Se $z_1 - z_2$ são números complexos quaisquer, temos que:

$$\begin{aligned} 1) \quad \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ 2) \quad \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \end{aligned}$$

Adição de Números Complexos

Sejam dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, a **soma** $z_1 + z_2$ é o número complexo cuja parte real é a soma das partes reais de z_1 e z_2 e a parte imaginária é a soma das partes imaginárias de z_1 e z_2 .

Vejamos o exemplo a seguir.

Dados $z_1 = -6 + 2i$ e $z_2 = 4 + 7i$, determine $z_1 + z_2$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (-6 + 2i) + (4 + 7i) \\ z_1 + z_2 &= -6 + 2i + 4 + 7i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -6 + 4 + 2i + 7i \\ z_1 + z_2 &= -2 + 9i \end{aligned}$$

Subtração de Números Complexos

Dados dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, definimos a **subtração** $z_1 - z_2$ como: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 + b_1 i) + (-a_2 - b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i$.

Dica

Apesar de o raciocínio ser análogo à adição, ou seja, faz-se a operação entre parte real e parte real e entre parte imaginária e parte imaginária, na subtração é importante atentar à **ordem** em que os números complexos são apresentados.

Para um melhor entendimento da dica anterior, vejamos um exemplo:

Dados: $z_1 = 3 + i$ e $z_2 = -5 - 2i$. Determine $z_1 - z_2$.

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (3 + i) - (-5 - 2i) \\ z_1 - z_2 &= 3 + i - 5 + 2i \\ z_1 - z_2 &= 3 - 5 + i + 2i \\ z_1 - z_2 &= -2 + 3i \end{aligned}$$

Multiplicação de Números Complexos

A **multiplicação** entre os números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ é o complexo $z_1 \cdot z_2$, cuja parte real é o produto das partes reais menos o produto das partes imaginárias, enquanto a parte imaginária é a soma dos produtos da parte real de um deles pela parte imaginária do outro.

Em outras palavras, para realizar a multiplicação entre números complexos, devemos realizar a propriedade distributiva entre esses números. Ou seja:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i + b_1 \cdot b_2 i^2 = \\ &= a_1 \cdot a_2 + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) - b_1 \cdot b_2 = \\ &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \cdot i \end{aligned}$$

Para fixarmos essa ideia, vejamos o seguinte exemplo:

Dados: $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 5 - 3i$. Determine $z_1 \cdot z_2$.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2 + i) \cdot (5 - 3i) \\ z_1 \cdot z_2 &= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3i + 5 \cdot i + 3i^2 \\ z_1 \cdot z_2 &= 10 + 6i + 5i + 3 \cdot (-1) \\ z_1 \cdot z_2 &= 10 - 3 + 11i \\ z_1 \cdot z_2 &= 7 + 11i \end{aligned}$$

Atenção! Diante do exemplo anterior, é importante lembrar que $i^2 = -1$.

Divisão de Números Complexos

Para efetuar a **divisão** entre dois números complexos, é necessário reescrever a divisão como uma fração e racionalizar o denominador dessa fração. Para fazer a racionalização da fração, multiplicamos o denominador pelo seu **conjugado**. Essa é a regra prática para dividir dois números complexos. Ou seja,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$$

Vejam o seguinte exemplo:

Dados: $z_1 = -1 + i$ e $z_2 = 4 - 2i$. Determine $\frac{z_1}{z_2}$.

O conjugado de z_2 é $4 + 2i$. Inserindo os dados na fórmula, temos:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(-1 + i)}{(4 - 2i)} \cdot \frac{(4 + 2i)}{(4 + 2i)} = \\&= \frac{(-1 \cdot 4 - 1 \cdot 2i + 4 \cdot i + 2 \cdot i^2)}{[4 - 2i + 4i + 2 \cdot (-1)]} = \\&= \frac{4^2 - (2i)^2}{16 - 4i^2} = \frac{16 - 4i^2}{16 - 4i^2} = \\&= \frac{(-4 + 2i - 2)}{16 - 4 \cdot (-1)} = \frac{-6 + 2i}{16 + 4} = \frac{-6 + 2i}{20} = -\frac{6}{20} + \frac{2i}{20} = -\frac{3}{10} + \frac{i}{10}\end{aligned}$$

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Norma e Módulo

Denominamos **norma** de um número complexo $z = a + bi$ ao número real não negativo $N(z) = a^2 + b^2$.

Denominamos **módulo** ou **valor absoluto** de um número complexo $z = a + bi$ ao número real não negativo $|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$. O módulo de um número complexo também pode ser representado da seguinte maneira: ρ ou r .

Acompanhe os exemplos para compreender melhor:

$$\begin{aligned}z &= 3 + 2i \rightarrow N(z) = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13 \text{ e } |z| = \sqrt{13} \\z &= -6i \rightarrow N(z) = 0^2 + (-6)^2 = 0 + 36 = 36 \text{ e } |z| = \sqrt{36} = 6 \\z &= 2 \rightarrow N(z) = 2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4 \text{ e } |z| = \sqrt{4} = 2 \\z &= \sqrt{21} - i \rightarrow N(z) = (\sqrt{21})^2 + (-1)^2 = 21 + 1 = 22 \text{ e } |z| = \sqrt{22}\end{aligned}$$

Módulo do Produto, do Quociente e da Soma de Números Complexos

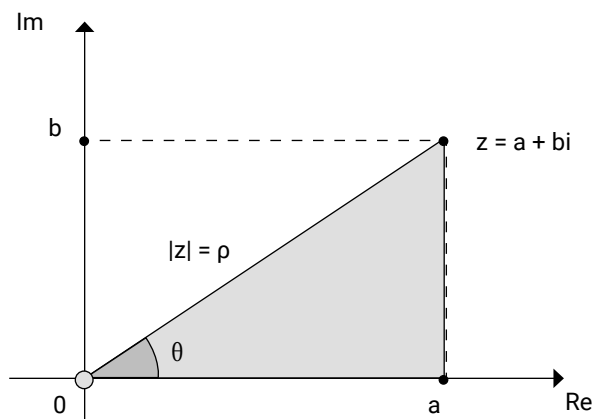
Sejam z_1 e z_2 números complexos quaisquer. Temos que:

- 1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- 2) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, (z_2 \neq 0)$
- 3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Plano de Argand-Gauss e Argumento

O ângulo no sentido anti-horário formado com o eixo horizontal do plano, quando o número complexo é representado na forma geométrica, é chamado de **argumento** de um número complexo. Veja:

Dado um número complexo $z = a + bi$, a sua representação no **Plano de Argand-Gauss** se dá por meio de um ponto. Observe:



Em que: $|z| = \rho$ é o módulo do número complexo e θ é o argumento do número complexo.

Utilizando o **Teorema de Pitágoras** no triângulo retângulo obtido no plano Argand-Gauss, temos que:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Consideremos nesse triângulo retângulo as seguintes relações:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\rho} \rightarrow a = \rho \cdot \cos \theta \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho} \rightarrow b = \rho \cdot \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{Sendo } \theta = \arctg \left(\frac{b}{a} \right)$$

Uma vez que $z = a + bi$, temos:

$$z = \rho \cdot \cos \theta + (\rho \cdot \sin \theta)i \rightarrow z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

Essa é a **forma trigonométrica** do complexo z .

Colocaremos, agora, $z = 1 + i$ na forma trigonométrica:

Se, $z = 1 + i$, logo $a = 1$ e $b = 1$.

Calculando o módulo de z , temos:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Calculando o argumento de z , temos:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \theta = 45^\circ$ (porque o ponto $P(1,1)$ pertence ao primeiro quadrante).

Logo:

$$z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

$$z = \sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$$

Atenção! O valor de θ pode ser representado em graus ou radianos, por se tratar da medida de um ângulo. Em muitos casos, é mais prático trabalhar com graus, especialmente ao utilizar os valores do seno e do cosseno de ângulos notáveis (30° , 45° e 60°). Nesse

contexto, uma outra resposta possível para o exemplo anterior seria:

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Multiplicação de Complexos na Forma Trigonométrica

Para realizar a **multiplicação** entre dois números complexos na forma trigonométrica, basta multiplicar os módulos e somar os argumentos (tomando, se necessário, a menor determinação positiva da soma). Assim, temos:

$$\begin{cases} z_1 = \rho_1 \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \sin \theta_1) \\ z_2 = \rho_2 \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \sin \theta_2) \\ z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{cases}$$

Vejamos o seguinte exemplo para aplicar na prática o que acabamos de aprender:

$$\text{Dados } z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{\pi}{5} \right) \text{ e } z_2 = 3 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{5} \right), \text{ calcular } z_1 \cdot z_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \cdot \left[\cos \left(\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} \right) \right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot \left[\cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{4\pi}{5} \right) \right]$$

Divisão de Complexos na Forma Trigonométrica

Para efetuar a **divisão** entre dois números complexos em sua forma trigonométrica, basta dividir os módulos e subtrair os argumentos. Assim, temos:

$$\begin{cases} z_1 = \rho_1 \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \sin \theta_1) \\ z_2 = \rho_2 \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \sin \theta_2) \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)] \end{cases}$$

Por meio do exemplo a seguir, praticaremos, agora, o que acabamos de aprender:

$$Z_1 = 4 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right]$$

$$Z_2 = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2} \cdot \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2 \cdot \left[\cos \left(\frac{2\pi}{4} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{4} \right) \right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2 \cdot \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

O Inverso de um Número Complexo em sua Forma Trigonométrica

O **inverso** de um número complexo é escrito na forma trigonométrica por:

$$z^{-1} = \rho^{-1} \cdot [\cos(-\theta) + i \cdot \sin(-\theta)]$$

Tome como exemplo:

$$\text{Dados: } z = 8 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{3} \right) \text{ Encontre } z^{-1}.$$

$$Z^{-1} = 8^{-1} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{3} \right) + i \cdot \sin \left(-\frac{5\pi}{3} \right) \right)$$

$$Z^{-1} = \frac{1}{8} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{3} \right) + i \cdot \sin \left(-\frac{5\pi}{3} \right) \right)$$

FÓRMULAS DE MOIVRE

Potenciação de Números Complexos

A forma trigonométrica é especialmente útil para calcular a **potência** de um número complexo. Para elevar um número complexo a um **expoente n**, basta **elevar o módulo a n** e **multiplicar o argumento por n**. Assim:

$$z^n = \rho^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta)]$$

A fórmula anterior é conhecida como a **Primeira Fórmula de Moivre**.

Ex.: calcule $(2 + 2i)^5$.

Primeiramente, passaremos $2 + 2i$ para a forma trigonométrica:

$$2 + 2i \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

Calculando o módulo de z , temos:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

Calculando o argumento de z , temos:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a}{\rho} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{b}{\rho} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \theta = 45^\circ$ (porque o ponto P (2,2) pertence ao primeiro quadrante).

Então:

$$z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$$

Logo, temos que:

$$(2 + 2i)^5 = [2 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)]^5$$

$$(2 + 2i)^5 = (2 \cdot \sqrt{2})^5 \cdot (\cos 5 \cdot 45^\circ + i \cdot \sin 5 \cdot 45^\circ)$$

$$(2 + 2i)^5 = 32 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos 225^\circ + i \cdot \sin 225^\circ)$$

$$(2 + 2i)^5 = 128 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$(2 + 2i)^5 = \frac{-128 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} - \frac{128 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} i$$

$$(2 + 2i)^5 = \frac{-128 \cdot 2}{2} - \frac{128 \cdot 2}{2} i$$

$$(2 + 2i)^5 = -128 - 128i$$

Radiciação de Números Complexos – Extração de Raízes

Para **extrair as raízes** de um número complexo, basta extrair a raiz do módulo ρ e dividir o argumento $\theta + 2 \cdot k\pi$ pelo índice n . Esse procedimento deve ser repetido n vezes, substituindo sucessivamente o valor de k por 0, 1, 2, 3, ..., ou seja:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

$$\left(k \in \mathbb{N} \leq k \leq n - 1 \right)$$

A fórmula anterior é conhecida como a **Segunda Fórmula de Moivre**.

Exemplo: calcule: $\sqrt[3]{-8i}$.

Primeiramente, passaremos $-8i$ para a forma trigonométrica:

$$-8i \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -8 \end{cases}$$

Calculando o módulo de z , temos:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = \sqrt{0 + 64} = \sqrt{64} = 8$$

Calculando o argumento de z , temos:

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a}{\rho} = \frac{0}{8} = 0 \\ \sin \theta &= \frac{b}{\rho} = \frac{-8}{8} = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \theta = 270^\circ \text{ ou } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Então:

$$z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta) = 8 \cdot (\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ)$$

Logo, temos que:

$$\{n = 3, \rho = 8, \theta = 270^\circ \text{ e } k = (0, 1, 2)\}$$

Como:

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

Teremos:

$$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos \frac{2k\pi + 270^\circ}{3} + i \cdot \sin \frac{2k\pi + 270^\circ}{3} \right)$$

Vejam, respectivamente, os valores para $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$. Para $k = 0$, temos:

$$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi + 270^\circ}{3} + i \cdot \sin \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi + 270^\circ}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot \left(\cos \frac{270^\circ}{3} + i \cdot \sin \frac{270^\circ}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot (\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot (0 + i \cdot 1)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2i$$

Para $k = 1$,

$$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi + 270^\circ}{3} + i \cdot \sin \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi + 270^\circ}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot \left(\cos \frac{2 \cdot 180^\circ + 270^\circ}{3} + i \cdot \sin \frac{2 \cdot 180^\circ + 270^\circ}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot \left(\cos \frac{360^\circ + 270^\circ}{3} + i \cdot \sin \frac{360^\circ + 270^\circ}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot \left(\cos \frac{630^\circ}{3} + i \cdot \sin \frac{630^\circ}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot (\cos 210^\circ + i \cdot \sin 210^\circ)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2}i$$

$$\sqrt[3]{-8i} = -\sqrt{3} - i$$

Para $k = 2$,

$$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi + 270^\circ}{3} + i \cdot \sin \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi + 270^\circ}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot \left(\cos \frac{4 \cdot 180^\circ + 270^\circ}{3} + i \cdot \sin \frac{4 \cdot 180^\circ + 270^\circ}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot \left(\cos \frac{720^\circ + 270^\circ}{3} + i \cdot \sin \frac{720^\circ + 270^\circ}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot \left(\cos \frac{990^\circ}{3} + i \cdot \sin \frac{990^\circ}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot (\cos 330^\circ + i \cdot \sin 330^\circ)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$\sqrt[3]{-8i} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2}i$$

$$\sqrt[3]{-8i} = \sqrt{3} - i$$

Portanto:

$$\sqrt[3]{-8i} = \{2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i\}$$

FORMA EXPONENCIAL DE UM NÚMERO COMPLEXO

Um número complexo escrito na forma trigonométrica $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$ pode ser escrito na **forma exponencial** como: