Secretaria de Estado de Educação da Paraíba

SEE-PB

Professor – Comum a Todos os Cargos

NV-009AB-25-SEE-PB-PROFESSOR-COM

SUMÁRIO

RACIOCÍNIO LÓGICO MATEMÁTICO

PRINCÍPIO DA REGRESSÃO OU REVERSÃO

O princípio da reversão ou regressão é um método de resolução de problemas matemáticos que busca propor uma alternativa ao uso de incógnitas e operações algébricas com letras. Parte-se, portanto, dos dados fornecidos por uma questão, ou seja, do valor final da incógnita após uma série de operações básicas feitas com base nela, realizando, assim, sobre o valor final, as operações inversas àquelas às quais a incógnita originalmente foi submetida, de forma que se obtenha o valor desconhecido desejado. Para facilitarmos o processo, disponibilizaremos os dados em pequenas tabelas contendo a operação realizada e sua respectiva inversa.

Exemplo: um número somado a 2, divido por 3 e multiplicado por 5 resulta em 45. Qual é esse número?

Para este tipo de exercício, no qual temos três elementos centrais, um valor inicial desconhecido, sucessivas operações sobre ele e um valor final conhecido, podemos aplicar o **princípio da reversão ou regressão**. Construímos, portanto, a tabela de operações que aparecem no problema:

	OPERAÇÃO	INVERSA
1º	+ 2	− 2
2º	÷ 3	× 3
3º	× 5	÷ 5

Pelo **princípio da reversão**, basta fazermos o caminho contrário, considerando as operações inversas:

- 3º: 45 ÷ 5 = 9;
- 2º: 9 · 3 = 27;
- 1º: 27 – 2 = 25.

Portanto, o número procurado é 25. Note, ainda, que esses exercícios nos permitem conferir a resposta de forma assertiva, sendo preciso apenas seguir o caminho original das operações conforme o problema dispõe. Por exemplo:

- 1º: 25 + 2 = 27;
- 2º: 27 3 = 9;
- 3º: 9 5 = 45.

Isso coincide com o valor final definido pela questão. A seguir, alguns pontos importantes a se considerar.

- Em se tratando de frações, devemos atentar-nos ao fato de que “retirar um terço” de um total equivale a permanecer com apenas dois terços desse valor. Ou seja, se se deseja descontar um terço de um valor:

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Então, devemos multiplicar esse valor por 2/3. Se se deseja aumentar um terço de determinado valor:

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Ou seja, devemos multiplicar esse valor por 4/3.

- Nas operações envolvendo frações, em vez de invertermos a operação, inverteremos a fração e manteremos a operação. Ex.: em “retirou um terço”, equivalente a “permanecer com dois terços”, a operação inversa será o produto vezes 3/2;
- Em alguns casos, ainda, podem aparecer porcentagens, que deverão ser convertidas em frações para o cálculo conforme definido nos itens anteriores. Por exemplo:

$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Portanto, devemos interpretar que “retirar 75%” é equivalente a “retirar 3/4” que, como colocado anteriormente, é igual a “sobrar 1/4”. Logo a operação inversa, neste tipo de situação, será vezes 4.

Acompanhe os exercícios comentados a seguir para revisar seus conhecimentos.

1. **(NOVA CONCURSOS — 2022)** Um investidor iniciante decidiu aplicar seu capital em uma ação que, no primeiro mês, o rendeu um total de R$ 2.750,00. Com o intuito de ter um investimento ainda maior, ele manteve o capital e o rendimento nesta mesma ação. Porém, no segundo mês, ao haver uma desvalorização no mercado, ele perdeu um terço do valor que investiu. Para não perder ainda mais, no terceiro mês, ele buscou investir o restante em outras finalidades da bolsa, o que acabou o rendendo apenas R$ 500,00. No quarto mês, ele fez um balanço e percebeu que o seu montante era de R$ 5.000,00. Qual foi o capital investido por ele no primeiro mês?

a) R$ 4.000,00.
b) R$ 6.247,00.
c) R$ 6.750,00.
d) R$ 10.750,00.
e) R$ 13.500,00.

Note que, nesta questão, o investidor tinha um capital inicial que queremos conhecer (incógnita), sobre o qual foram feitas sucessivas operações. Perceba, ainda, que devemos redobrar a atenção para o uso de frações, nas quais subtrair um terço será equivalente a permanecer com apenas dois terços do valor total.

	OPERAÇÃO	INVERSA
1º	+ 2.750	− 2.750
2º	x $\frac{2}{3}$	x $\frac{3}{2}$
3º	+ 500	− 500

O caminho reverso dessas operações, portanto, consistirá em considerarmos o valor do montante final de 5.000 e operarmos, agora, na ordem 3º → 2º → 1º, invertendo cada uma das operações presentes. Logo, as novas operações serão, nesta ordem:
- *3º: 5.000 – 500 = 4.500*
- *2º: $4.500 \cdot \frac{3}{2} = \frac{13.500}{2} = 6.750$*
- *1º: 6.750 – 2.750 = 4.000. Resposta: Letra A.*

2. **(NOVA CONCURSOS — 2022)** Um motorista precisou abastecer seu carro por completo para uma viagem, pois percebeu que apenas o que tinha em seu tanque não seria o suficiente. Ao olhar na bomba do posto de gasolina, ele notou que foram abastecidos exatos 30 litros. Quando chegou em certo ponto de seu trajeto, ele percebeu, ainda, que seu tanque estava apenas na metade, então resolveu parar no posto mais próximo e verificou na bomba que foram abastecidos 40 litros. Ao chegar em seu destino, ele se certificou de que possuía apenas 25% do tanque cheio, o que equivale a 15 litros. Quantos litros havia no tanque antes do primeiro abastecimento para a viagem?

a) 5.
b) 10.
c) 25.
d) 30.
e) 45.

Perceba que precisaremos das operações inversas àquelas realizadas sobre o valor desconhecido (litros de gasolina antes da viagem). Atente-se, ainda, para os casos mais essenciais, como o momento em que resta apenas metade do tanque do carro, uma vez que "restar a metade" é equivalente a dividir o valor por 2, e restar 25% é o equivalente a multiplicar o valor por 25/100 = 1/4. Portanto, a tabela de operações será dada por:

	OPERAÇÃO	INVERSA
1º	+ 30	– 30
2º	÷ 2	x 2
3º	+ 40	– 40
4º	x $\frac{1}{4}$	x 4

Por consequência, seguindo o caminho contrário e partindo do valor final de 15 litros, teremos:
- *4º: 15 · 4 = 60;*
- *3º: 60 – 40 = 20;*
- *2º: 20 · 2 = 40;*
- *1º: 40 – 30 = 10.*

Portanto, antes de abastecer pela primeira vez para o início da viagem, o tanque possuía 10 litros. Resposta: Letra B.

LÓGICA DEDUTIVA, ARGUMENTATIVA E QUANTITATIVA

ARGUMENTAÇÃO DEDUTIVA

A argumentação dedutiva é baseada em **inferências lógicas** que seguem um padrão de raciocínio conhecido como dedução. Nesse tipo de argumentação, as premissas fornecidas são consideradas verdadeiras e, a partir delas, a conclusão é inevitável e necessária. O exemplo clássico é o silogismo: "todos os seres humanos são mortais; Sócrates é um ser humano; logo, Sócrates é mortal." As premissas estabelecem uma relação que leva a uma conclusão inequívoca.

RACIOCÍNIO LÓGICO QUANTITATIVO

Entende-se que o **raciocínio lógico quantitativo** trata-se de uma forma de pensamento que envolve a análise e a avaliação de informações com base em quantidades, números e relações matemáticas. Ele é usado para resolver problemas que requerem compreensão e manipulação de dados numéricos de maneira lógica e sistemática. Ademais, tal tipo de raciocínio envolve a capacidade de identificar padrões numéricos, fazer estimativas, calcular probabilidades, interpretar gráficos e tabelas, bem como desenvolver argumentos convincentes com base em dados quantitativos.

Quando se pensa no cotidiano, o **raciocínio lógico quantitativo** também é essencial para a resolução de problemas, sejam estes relacionados a planejar orçamentos, interpretar estatísticas, tomar decisões informadas sobre investimentos financeiros ou avaliar riscos.

Para desenvolver e aprimorar o raciocínio lógico quantitativo, é de suma importância praticar a resolução de problemas envolvendo números, proporções, porcentagens, taxas, equações e outros conceitos matemáticos. Da mesma maneira, aprender a abordar problemas de maneira estruturada, dividindo-os em etapas menores e identificando as informações relevantes, faz-se de grande utilidade.

Quando se pensa em concursos, o raciocínio lógico quantitativo é frequentemente avaliado por meio de perguntas que requerem a aplicação de princípios matemáticos, análise de gráficos, interpretação de dados numéricos e resolução de problemas que envolvem cálculos numéricos. Portanto, é muito importante que o candidato estude tais conteúdos.

Para além disso, conteúdos de **lógica proposicional** e de **argumentação** lógica fazem-se úteis para a resolução de tais problemas. Outrossim, desenvolver habilidades sólidas de raciocínio lógico quantitativo por meio da resolução de questões é muito importante.

Assim, vamos responder uma questão para entender melhor!

1. **(FGV — 2017)** Juvenal comprou, ao todo, 10 exemplares de dois livros de Jorge Amado: "Gabriela, Cravo e Canela" e "Tieta do Agreste". Cada Exemplar de "Gabriela, Cravo e Canela" custou R$30,00 e cada exemplar de "Tieta do Agreste" custou R$70,00. O valor total da compra foi de R$460,00.

Assinale a opção que indica o número de exemplares de “Gabriela, Cravo e Canela” que Juvenal comprou.

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
e) 7.

Para iniciar a resolução da questão, vamos chamar o livro “Gabriela, Cravo e Canela” de A e o livro “Tieta do Agreste” de B. O enunciado diz-nos que os 10 exemplares, ao todo, custaram R$ 460,00. Ou seja, A + B = 10 e 30A + 70B = 460. Podemos colocar essas equações em um sistema, ficando:

$$\begin{cases} A + B = 10 \\ 30A + 70B = 460 \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação por 10, temos:

$$\begin{cases} A + B = 10 \\ 30B + 70A = 460 \; (\div 10) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B = 10 \\ 3A + 7B = 46 \end{cases}$$

Para resolver o sistema, vamos multiplicar a primeira equação por –7:

$$\begin{cases} A + B = 10 (\cdot (-7)) \\ 3A + 7B = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -7A - 7B = -70 \\ 3A + 7B = 46 \end{cases} \rightarrow -4A + 0B = -24$$

Temos, então, que –4A = –24, ou seja, A = 6. Como o enunciado só nos pede o número de exemplares de “Gabriela, Cravo e Canela”, podemos parar nossa resolução aqui, entendendo que o número de exemplares de tal livro é 6.
Observe que mesmo o enunciado nos indicando qual o valor do exemplar “Tieta do Agreste”, essa informação não foi utilizada para resolver a questão.
Resposta: Letra D.

Dica

Perceba que, mesmo se tratando de uma questão de raciocínio, o conteúdo matemático de sistemas foi abordado.

LÓGICA MATEMÁTICA QUALITATIVA: SEQUÊNCIAS LÓGICAS ENVOLVENDO NÚMEROS, LETRAS E FIGURAS

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Esse tema é abordado de maneira que, embora pareça simples, pode se revelar bastante desafiador. O principal objetivo é identificar a lei de formação ou o padrão da sequência, uma vez que, em questões sobre sequências ou raciocínio sequencial, costuma-se apresentar um conjunto de dados organizados segundo alguma “regra” implícita ou lógica específica.

O desafio, portanto, consiste em descobrir essa “regra” para, a partir dela, encontrar outros termos pertencentes à mesma sequência.

Veja o exemplo a seguir:

2, 4, 6, 8, ...

A primeira pergunta que podemos fazer para encontrar a lei de formação é: os números estão aumentando ou diminuindo?

Caso os termos estejam aumentando, é recomendável tentar operações como soma ou multiplicação entre eles. Observe o exemplo anterior: 2, 4, 6, 8, ... Do primeiro para o segundo termo, somamos dois e, em seguida, repetimos essa operação nos demais termos.

2 + 2 = 4
4 + 2 = 6
6 + 2 = 8

Logo, o nosso próximo termo será o número 10, pois 8 + 2 = 10.

Caso os números estejam diminuindo, é possível buscar uma lógica envolvendo subtrações ou divisões entre os termos.

Agora, observe esta outra sequência:

2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Qual será o próximo termo? Muitos alunos tendem a responder que o próximo número é 15, mesmo notando que o 9 não faz parte da sequência. A tendência é ignorar esse “detalhe” e marcar rapidamente o valor 15. Mas muito cuidado! O padrão identificado deve ser capaz de justificar **toda** a sequência apresentada. Neste caso, estamos lidando com números primos, aqueles que só podem ser divididos por eles mesmos ou pelo número 1. Assim, o próximo termo será o 17, e não o 15. Aliás, os próximos números primos são: 17, 19, 23, 29, 31, 37...

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS ALTERNADAS

É bastante comum surgirem questões envolvendo sequências com mais de uma lei de formação. Em alguns casos, podemos ter duas sequências que se alternam, como neste exemplo:

2, **5**, 4, **10**, 6, **15**, 8, **20**, ...

Se analisarmos mais minuciosamente, podemos identificar uma sequência em que, de um número para o outro, somam-se 2 unidades, e outra sequência em que, de um número para o outro, somam-se 5 unidades. Essas duas seguem padrões alternados, ou subsequências numéricas. Veja:

- Primeira subsequência: 2, 4, 6, 8, ...
- Segunda subsequência: **5**, **10**, **15**, **20**, **...**

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma progressão aritmética é aquela em que os termos crescem, sendo **adicionados** a uma razão constante, normalmente representada pela letra “r”.

Dica

Denomina-se **termo inicial** o valor do primeiro número que compõe a sequência, já a **razão** diz respeito à regra que permite, a partir de um termo, obter o seguinte.

Observe o exemplo a seguir:

{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...}

Observe que 1 + 2 = 3, 3 + 2 = 5, 5 + 2 = 7, 7 + 2 = 9, e assim sucessivamente. Temos um exemplo nítido de uma progressão aritmética (PA) com uma razão 2 — ou seja, r = 2 — e termo inicial igual a 1.

Em questões envolvendo progressões aritméticas, é importante saber como se obtém o termo geral e a soma dos termos, conforme veremos a seguir.

Termo Geral da PA

Trata-se de uma fórmula que, a partir do primeiro termo e da razão da PA, permite calcular qualquer outro termo. Observe:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Nesta fórmula, $\mathbf{a_n}$ é o termo de posição n na PA (o “n-ésimo” termo); $\mathbf{a_1}$ é o termo inicial, **r** é a razão e **n** é a posição do termo na PA.

Utilizando o exemplo anterior, vamos descobrir o termo de posição 10. Já temos as informações necessárias: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...}.

- o termo que buscamos é o da 10ª posição, isto é, a_{10};
- a razão da PA é 2, portanto r = 2;
- o termo inicial é 1, logo $a_1 = 1$;
- n, ou seja, a posição que buscamos, é a de número 10: n = 10.

Logo,

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$a_{10} = 1 + (10 - 1) \cdot 2$$
$$a_{10} = 1 + 9 \cdot 2$$
$$a_{10} = 1 + 18$$
$$a_{10} = 19$$

Isto é, o termo da posição 10 é o 19. Volte à sequência e confira. Perceba que, com essa fórmula, podemos calcular qualquer termo da PA. O termo da posição 200 é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$a_{200} = 1 + (200 - 1) \cdot 2$$
$$a_{200} = 1 + 199 \cdot 2$$
$$a_{200} = 1 + 198$$
$$a_{200} = 199$$

Soma dos Termos da PA

A fórmula a seguir nos permite calcular a soma dos “n” primeiros termos de uma progressão aritmética:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Para entendermos melhor, vamos calcular a soma dos 7 primeiros termos do exemplo já apresentado: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...}.

Sabemos que $a_1 = 1$ e n = 7. O termo a_n será, neste caso, o termo a_7, que, ao observarmos a sequência, é o número 13, ou seja, $a_7 = 13$. Substituindo na fórmula, temos:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$
$$S_7 = \frac{7 \cdot (1 + 13)}{2}$$
$$S_7 = \frac{7 \cdot (14)}{2}$$
$$S_7 = \frac{98}{2} = 49$$

Dependendo do sinal da razão r, a PA pode ser:

- PA **crescente**: se r > 0, a PA terá termos em ordem crescente. Ex.: {1, 4, 7, 10, 13, 16...} → r = 3
- PA **decrescente**: se r < 0, a PA terá termos em ordem decrescente. Ex.: {20, 19, 18, 17 ...} → r = -1
- PA **constante**: se r = 0, todos os termos da PA serão iguais. Ex.: {7, 7, 7, 7, 7, 7, 7...} → r = 0.

Importante!

PA crescente: se r > 0;
PA decrescente: se r < 0;
PA constante: se r = 0.

Termo Central de uma PA

Em uma progressão aritmética de três termos, o segundo termo ou o termo do meio é a média aritmética entre o primeiro e terceiro termo. Veja:

$$\text{PA } (a_1, a_2, a_3) \rightarrow a_2 = \frac{(a_1 + a_3)}{2}$$

$$\text{PA } (2, 4, 6) \rightarrow 4 = \frac{(2+6)}{2} \rightarrow 4 = 4$$

Revise seus conhecimentos por meio dos exercícios comentados a seguir:

1. **(IBFC — 2015)** O total de múltiplos de 4 existentes entre os números 23 e 125 é:

a) 25
b) 26
c) 27
d) 28
e) 24

O primeiro múltiplo de 4 neste intervalo é 24, e o último é 124. Veja que os múltiplos de 4 formam uma PA de razão igual a 4. Assim, temos as seguintes informações:
$a_1 = 24$
$a_n = 124$
r = 4 (podemos somar de 4 em 4 unidades para obter os múltiplos de 4).
Ao substituir na fórmula do termo geral, encontraremos a quantidade de elementos (múltiplos):

$a_n = a_1 + (n – 1) \cdot r$
$124 = 24 + (n – 1) \cdot 4$
$124 = 24 + 4n – 4$
$124 – 24 + 4 = 4n$
$104 = 4n$
$n = 26$
Resposta: Letra B.

2. **(FCC — 2018)** Rodrigo planejou fazer uma viagem em 4 dias. A quantidade de quilômetros que ele percorrerá em cada dia será diferente e formará uma progressão aritmética de razão igual a − 24. A média de quilômetros que Rodrigo percorrerá por dia é igual a 310 km. Desse modo, é correto concluir que o número de quilômetros que Rodrigo percorrerá em seu quarto e último dia de viagem será igual a

a) 334.
b) 280.
c) 322.
d) 274.
e) 310.

Inicialmente, é necessário encontrar o a1 para, em seguida, determinar a2, a3 e a4. Todos os termos devem ser expressos em função de a1, de forma a permitir a substituição na média. Utilizando a fórmula do termo geral:
$r = – 24$
$a_n = a_1 + (n – 1) \cdot r$
Achando a_1:
$a_1 = a_1 + (1 – 1) \cdot r$
a1 = a1
Colocando a_2 em função de a_1:
$a_2= a_1+ (2 – 1) \cdot r$
$a_2 = a_1 + r$
Colocando a_3 em função de a_1:
$a_3= a_1+ (3 – 1) \cdot r$
$a_3 = a_1 + 2r$
Colocando a_4 em função de a_1:
$a_4 = a_1 + (4 – 1) \cdot r$
$a_4 = a_1 + 3r$
Substituindo na fórmula da média aritmética:

$$\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4)}{4} = 310$$

$$\frac{(a_1+a_1+r+a_1+2r+a_1+3r)}{4} = 310$$

$$\frac{4 \cdot a_1+6 \cdot r}{4} = 310$$

$4 \cdot a_1 + 6 \cdot r = 310 \cdot 4$
$4 \cdot a_1 + 6 \cdot (–24) = 1240$
$4\ a_1 – 144 = 1240$
$4 \cdot a_1=1240+144$
$$a_1 = \frac{1384}{4}$$

$a_1 = 346$

Encontrando a4:
$a_4= 346 + (4 – 1) \cdot r$
$a_4= 346 + 3r$
$a_4= 346 + 3 \cdot (– 24)$
$a_4= 346 – 72$
$a_4 = 274$
Resposta: Letra D.

3. **(FCC — 2017)** Em um experimento, uma planta recebe a cada dia 5 gotas a mais de água do que havia recebido no dia anterior. Se no 65° dia ela recebeu 374 gotas de água, no 1° dia do experimento ela recebeu

a) 64 gotas.
b) 49 gotas.
c) 59 gotas.
d) 44 gotas.
e) 54 gotas.

Já sabemos que a razão é $r = 5$ e que $a_{65} = 374$. Portanto, a_1 é dado por:
$a_{65}= a_1 + (n – 1) \cdot r$
$374 = a_1 + (65 – 1)\ 5$
$374 = a_1 + 64 \cdot 5$
$374 = a_1 + 320$
$a_1 = 54$ gotas.
Resposta: Letra E.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Observe a sequência a seguir:

{2, 4, 8, 16, 32...}

Cada termo é igual ao anterior multiplicado por 2. Esse é um exemplo típico de progressão geométrica (PG). Em uma PG, cada termo é obtido a partir da multiplicação do anterior por um mesmo número, denominado **razão da progressão geométrica**. Essa razão é simbolizada pela letra **q**.

No exemplo anterior, temos q = 2 e o termo inicial $a_1 = 1$. Assim como no caso da PA, geralmente precisamos determinar o termo geral e a soma dos termos.

Termo Geral da PG

A fórmula a seguir permite calcular qualquer termo (a_n) de uma progressão geométrica, a partir do primeiro termo (a_1) e da razão (q):

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

No nosso exemplo, o quinto termo, a_5 (n = 5), pode ser encontrado da seguinte maneira:

{2, 4, 8, 16, 32...}
$$a_5 = 2 \cdot 2^{5-1}$$
$$a_5 = 2 \cdot 2^4$$
$$a_5 = 2 \cdot 16$$
$$a_5 = 32$$

Soma dos Termos de uma PG

A fórmula a seguir permite calcular a soma dos “n” primeiros termos da progressão geométrica:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n-1)}{q-1}$$

Utilizando novamente o exemplo e calculando a soma dos quatro primeiros termos (n = 4), temos: {2, 4, 8, 16, 32...}.

$$S_4 = \frac{2 \cdot (2^4-1)}{2-1}$$