Escola Preparatória de Cadetes do Ar

EPCAR

Cadete

NV-004MR-25-EPCAR-CADETES
Cód.: 7908428811679

NOVA CONCURSOS

SUMÁRIO

MATEMÁTICA

CONJUNTOS

NOÇÕES DE UM CONJUNTO

Os conjuntos (ou coleções) devem ser representados por letras latinas maiúsculas: A, B, C etc.

Alguns exemplos de conjuntos:

- **M** = {janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro} é o conjunto dos meses do ano que têm 31 dias;
- **P** = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} é o conjunto dos números primos até 19;
- **N** = {Estados Unidos, Canadá, México} é o conjunto dos países da América do Norte.

DESCRIÇÃO DE UM CONJUNTO

Os elementos referem-se aos objetos inerentes aos conjuntos, separados por vírgulas ou ponto e vírgula. Nos exemplos anteriores, cada um dos componentes dos conjuntos apresentados são elementos destes. Veja outro exemplo:

- V = {0, 2, 4, 5, 6}. Neste caso, os números 0, 2, 4, 5 e 6 são elementos do conjunto V.

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA E INCLUSÃO

A relação de pertinência entre conjunto e elemento estabelece a identificação entre eles. Para tanto utilizamos os símbolos ∈ (pertence) ou ∉ (não pertence). Observe o conjunto a seguir para compreender melhor:

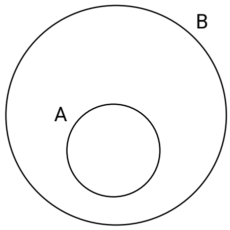
- **R** = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}:
  - o número 7 não pertence ao conjunto R, ou seja, 7 ∉ R;
  - o número 3 pertence ao conjunto R, ou seja, 3 ∈ R.

SUBCONJUNTOS

Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertencer também a B, mas nem todo elemento de B necessariamente pertence a A.

A notação utilizada nesse contexto é a seguinte: $A \subset B \leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Lê-se: A está contido em B se, e somente se, para todo x, se x pertence a A, então x pertence a B. Simplificando o entendimento, é o mesmo que dizer que o conjunto A está contido no conjunto B se, e somente se, todos os elementos de A também estiverem em B. Isso significa que, ao escolher qualquer elemento de A, ele também estará em B. Se isso for verdade para todos os elementos de A, podemos afirmar que A está contido em B.

Por diagramas, poderíamos representar essa situação da seguinte maneira:



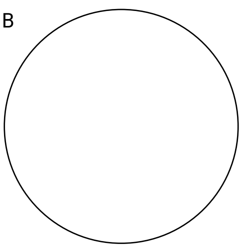
Subconjunto A do conjunto B.

Perceba que todo elemento pertencente ao conjunto A automaticamente pertence também a B. É dessa maneira que representamos, por meio de diagramas, a relação de inclusão A ⊂ B. Concluímos, portanto, que A é subconjunto de B.

Diferentemente da relação entre elementos e conjuntos, em que utilizamos as relações de pertinência (∈ ou ∉), quando tratamos da relação entre conjuntos, utilizamos os seguintes símbolos:

- ⊂ (está contido);
- ⊄ (não está contido);
- ⊃ (contém); ou
- ⊅ (não contém).

Assim, dá-se o nome de subconjunto impróprio de B à seguinte situação:



Subconjunto impróprio de B.

Ou seja, subconjunto impróprio é aquele que é o próprio conjunto.

A notação utilizada nesse contexto é a seguinte: $A = B \leftrightarrow (A \subset B \text{ e } B \subset A)$. Lê-se: A é igual a B, se, e somente se, A está contido em B e B está contido em A. De modo simplificado, dois conjuntos A e B são iguais se todos os elementos de A também estiverem em B, e todos os elementos de B também estiverem em A. Isso significa que A e B têm exatamente os mesmos elementos.

Dica

Ao estudar o subconjunto impróprio, o aluno pode perceber a similaridade entre ele e os conjuntos iguais, embora sejam conceitos distintos. Observe o exemplo a seguir para entender melhor a diferença entre eles.

Para ilustrar o conteúdo mencionado na dica anterior, considere, como exemplo, a existência de duas caixas de brinquedo:

- A caixa A contém os seguintes brinquedos: bola, boneca e carrinho;
- A caixa B contém exatamente os mesmos elementos: bola, boneca e carrinho.

Na perspectiva de **conjuntos iguais**, podemos dizer que as caixas A e B são iguais porque contêm exatamente os mesmos brinquedos. Não há nenhum brinquedo na caixa A que não esteja também na caixa B, e vice-versa. Concluindo, os conjuntos A e B são iguais.

Na **teoria dos subconjuntos**, por sua vez, imagine que você está olhando somente para a caixa A. Pode-se dizer que a caixa A é um subconjunto de si mesma, pois todos os brinquedos que estão na caixa A, logicamente, a pertecem. Embora pareça óbvio, esse é o motivo pelo qual denomina-se subconjunto impróprio, uma vez que todos os elementos do conjunto original são incluídos, sem exceção. Portanto, a caixa A é um subconjunto de si mesma, o que não é algo novo ou interessante, pois todo conjunto é sempre um subconjunto de si mesmo.

IGUALDADE DE CONJUNTOS

Dois conjuntos A e B são considerados iguais quando todos os elementos de A também pertencem a B, e todos os elementos de B pertencem a A.

A notação utilizada nesse contexto é a seguinte: $A = B \leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Lê-se: A é igual a B se, e somente se, para todo x, x pertence a A se, e somente se, x pertence a B. De modo simplificado, o entendimento é que o conjunto A é igual ao conjunto B se, e somente se, todo elemento de A também estiver em B, e todo elemento de B também estiver em A. Ou seja, A e B contêm exatamente os mesmos elementos.

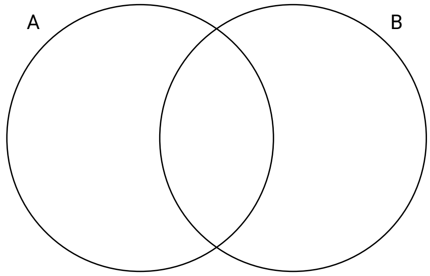
OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

União ou Reunião de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chama-se união de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou B (disjunção lógica).

A notação utilizada nesse contexto é a seguinte: $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Lê-se: os elementos do conjunto A união com B são representados por x, tal que x pertence a A ou x pertence a B. Simplificando, a notação indica que $A \cup B$ é o conjunto que inclui todos os elementos que estão em A, em B ou em ambos. Isso significa que, se você escolher qualquer elemento x, ele estará em $A \cup B$ se pertencer a A ou a B. Ou seja, $A \cup B$ é formado por todos os elementos que pertencem a A, a B ou a ambos os conjuntos.

Por diagramas, poderíamos representar essa situação da seguinte maneira:



União dos conjuntos A e B.

Perceba que os elementos pertencentes ao conjunto $A \cup B$ (A união com B) são aqueles que pertencem exclusivamente a A, unidos aos que pertencem exclusivamente a B, juntamente com os que pertencem à interseção de A e B (como veremos a seguir).

É dessa maneira que representamos, por meio de diagramas, a relação de disjunção lógica $A \cup B$.

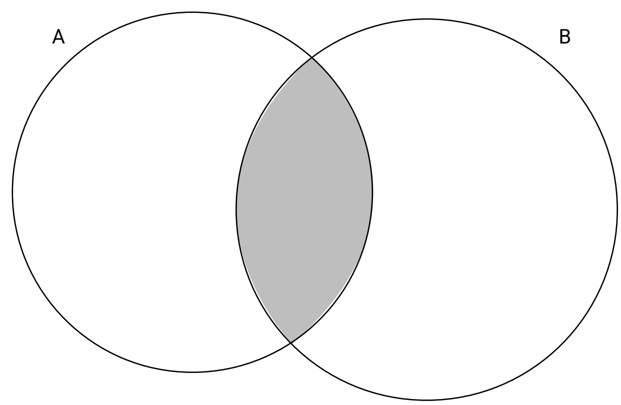
Intersecção de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chama-se intersecção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B (conjunção lógica).

A notação utilizada nesse contexto é a seguinte: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ e } x \in B\}$. Lê-se: os elementos do conjunto A intersecção com B são representados por x, tal que x pertence a A e x pertence a B.

Sobre a notação apresentada, também é possível interpretá-la de outra forma, reconhecendo que $A \cap B$ é o conjunto que contém apenas os elementos que estão simultaneamente em A e em B. Isso significa que, se você escolher qualquer elemento x, ele estará em $A \cap B$ somente se fizer parte tanto de A quanto de B. Em outras palavras, $A \cap B$ é formado pelos elementos comuns a ambos os conjuntos.

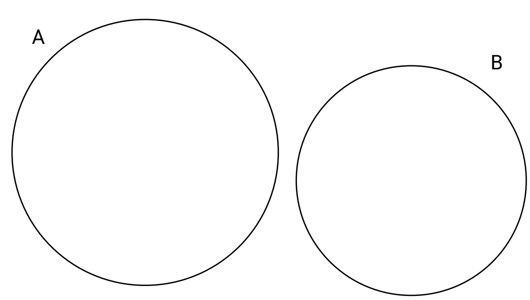
Por meio de diagramas, poderíamos representar essa situação da seguinte maneira:



Intersecção dos conjuntos A e B.

Perceba que os elementos pertencentes ao conjunto $A \cap B$ (A intersecção com B) são aqueles que pertencem a A e a B simultaneamente.

> **Dica**
>
> Existe uma diferença entre **conjuntos disjuntos** (intersecção vazia) e **conjuntos intersecantes** (intersecção não vazia). Anteriormente, por meio de diagramas, representamos dois conjuntos A e B intersecantes. Veja na figura a seguir como devemos representar **conjuntos disjuntos**.



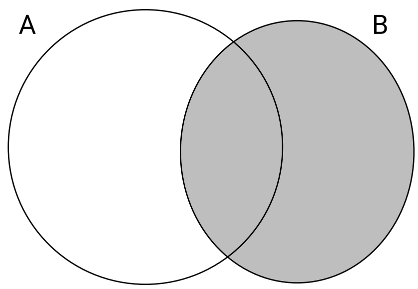
Conjuntos A e B disjuntos.

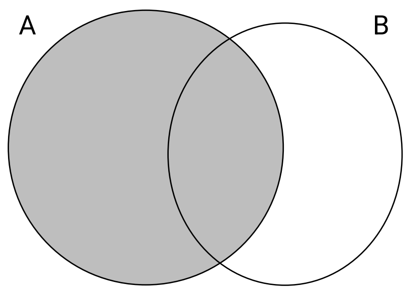
Após a apresentação das operações de união e intersecção entre dois ou mais conjuntos, que podem ser facilmente estendidas para três ou quatro conjuntos, um princípio fundamental para evitar a contagem excessiva de elementos em qualquer conjunto é o **princípio da inclusão-exclusão**.

- **Intersecção em Relação ao Princípio da Inclusão-Exclusão**

O princípio da inclusão-exclusão tem a seguinte notação: n(A ∪ B) = n(A) + n(B) – A ∩ B). Lê-se: o número de elementos do conjunto A união com B é dado pelo número de elementos de A, somado com o número de elementos de B, menos o número de elementos de A intersecção com B.

Observe as imagens a seguir para constatar a veracidade do princípio:





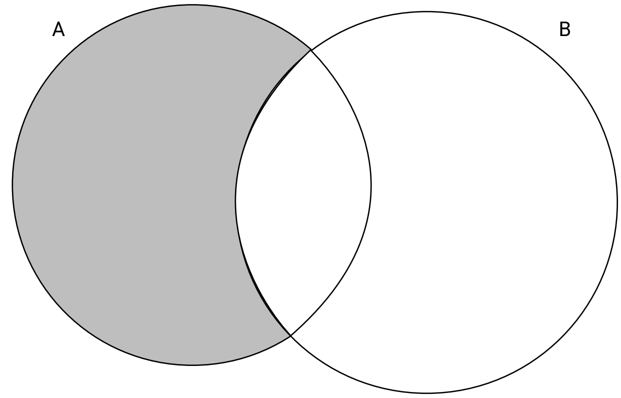
Nas imagens anteriores, podemos observar que ao representarmos na figura à esquerda o conjunto A, automaticamente a intersecção de A com B (A ∩ B) foi adicionada, pois ela está contida em A ((A ∩ B)⊂A) . O mesmo ocorre em relação ao conjunto B: automaticamente a intersecção de A com B foi adicionada (figura à direita), pois ela está contida em B ((A∩B)⊂B). Portanto temos que eliminar a intersecção uma vez (correspondente ao termo n(A ∩ B) no princípio da inclusão-exclusão) para que essa contagem não seja excedida.

Diferença de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que **não** pertencem a B.

A notação utilizada neste contexto é a seguinte: A – B = {x/x ∈ A e x ∉ B}. Lê-se: os elementos do conjunto A diferença com B são representados por x, tal que x pertence a A e x não pertence a B.

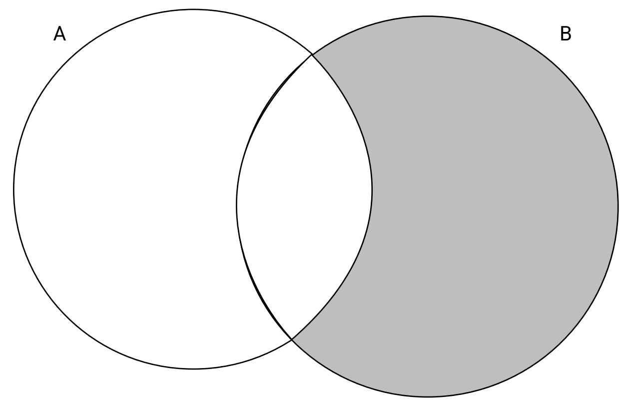
Por meio de diagramas, poderíamos representar essa situação da seguinte maneira:



Conjunto A diferença com B.

Perceba que os elementos pertencentes ao conjunto A – B (A diferença com B) são aqueles que pertencem exclusivamente ao conjunto A.

Da mesma maneira podemos definir que o conjunto B – A (B diferença com A) são aqueles que pertencem exclusivamente ao conjunto B. Observe a figura a seguir.



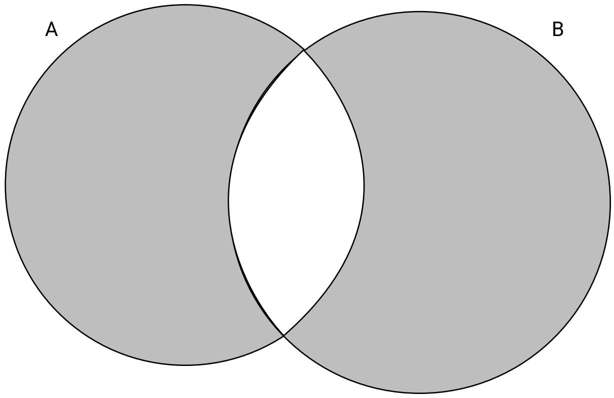
Conjunto B diferença com A.

Diferença Simétrica de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença simétrica de A com B o conjunto formado pelos elementos que pertencem exclusivamente a A ou a B.

A notação utilizada neste contexto é a seguinte: A Δ B = (A ∪ B) – (A ∩ B). Lê-se: os elementos do conjunto A diferença simétrica com B são representados pela diferença entre o conjunto A união com B e A intersecção com B, ou, ainda, esse mesmo conjunto pode ser representado pela união entre a diferença de A com B e de B com A.

Por meio de diagramas, poderíamos representar essa situação da seguinte maneira:



Conjunto diferença simétrica de A com B.

Conjunto Complementar

Um conjunto complementar, também conhecido como complemento de um conjunto, é um conceito fundamental na teoria dos conjuntos e na matemática em geral. Ele representa todos os elementos que não pertencem a um conjunto específico com base em um conjunto universal predefinido.

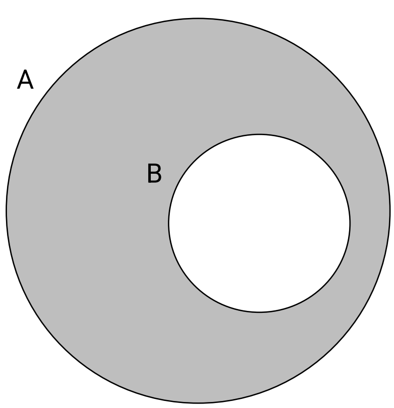
Dados dois conjuntos A e B, tais que B ⊂ A, chama-se **complementar** de B em relação a A o conjunto A – B, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

A notação utilizada neste contexto é a seguinte: C_A^B = A - B. Lê-se: complementar de B em relação a A equivale à A diferença com B. O complementar de B em relação a A também pode ser representado por: $\overline{B}$ ou B^c.

Para compreendermos melhor o conceito de conjunto complementar, tomaremos como exemplo os conjuntos A = {02, 04, 06, 08, 10, 12} e B = {02, 04, 06}.

Note que para o conjunto B tornar-se o conjunto A, faltam os elementos 08, 10 e 12. Para além da observação, a fim de identificar esses elementos, podemos utilizar a diferença de conjuntos, isto é, A – B = {08, 10, 12}.

Por meio de diagramas, essa situação poderia ser representada da seguinte maneira:



Conjunto complementar de B em relação a A.

- **Propriedades do Conjunto Complementar**
  - O complemento do complemento de um conjunto é o próprio conjunto original: $\overline{(\overline{A})} = A$;
  - O conjunto vazio, denotado por ∅, é o complemento do conjunto universal: $\overline{U} = \emptyset$;
  - O complemento do conjunto vazio é o conjunto universal: $\overline{\emptyset} = U$;
  - A união de um conjunto e seu complemento é igual ao conjunto universal: $A \cup \overline{A} = U$;
  - A interseção de um conjunto e seu complemento é o conjunto vazio: $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Importante!

O conjunto $C_A^B = \overline{B} = B^c$ só será diferente do conjunto vazio (∅) se for respeitada a restrição de que B é complementar a A, isto é, que B pertence a A e está contido em tal.

- **Observações dos Conjuntos Complementares**

  - **A Ordem Não Interfere**

Observe o conjunto A = {1, 2, 3, 4}. Se trocarmos a ordem dos seus elementos, como, por exemplo, {3, 1, 4, 2}, esse conjunto continua recebendo o nome de A, pois apresenta os mesmos elementos ainda que estes estejam em ordem distinta daquela apresentada inicialmente). Portanto, variações do conjunto A (outras possíveis são: {1, 3, 4, 2}, {4, 3, 1, 2}, {2, 3, 4, 1} etc.), no que tange à ordem dos elementos, não interferem em sua nomeação.

  - **A Repetição Não Interfere**

Observe o mesmo conjunto A = {1, 2, 3, 4}. Se repetirmos os seus elementos, como, por exemplo, {2, 2, 3, 4, 4, 1, 1, 1}, esse conjunto continua recebendo o nome de A, pois apresenta os mesmos elementos (ainda que estejam repetidos). Cabe destacar que, neste caso, a quantidade de elementos continua sendo a mesma, ou seja, 4 elementos pertencem ao conjunto A. Portanto, as variações do conjunto A (outras possíveis são: {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4}, {1, 2, 3, 3, 3, 4}, {4, 4, 2, 2, 3, 1, 4} etc.), no que tange à repetição dos elementos, não interferem em sua nomeação.

  - **O Conjunto Vazio Está Contido em Qualquer Conjunto**

Representamos essa situação da seguinte maneira: ∅ ⊂ A. Embora possa parecer insignificante à primeira vista, essa propriedade é **extremamente importante** para a simplificação de demonstrações de teoremas. Sem ela, diversas situações envolvendo conjuntos teriam suas “comprovações” apresentadas de maneira muito mais exaustiva.

  - **Todo Conjunto Está Contido em Si Mesmo**

Representamos essa situação da seguinte maneira: A ⊂ A. Embora aparentemente insignificante, essa propriedade ocupa um “lugar de destaque” no contexto da teoria de conjuntos, sendo extremamente útil na simplificação de demonstrações de teoremas. Ela também é conhecida como **propriedade reflexiva**.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS: PROPRIEDADES, OPERAÇÕES, NÚMEROS PRIMOS E COMPOSTOS, DIVISIBILIDADE, DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS, MÚLTIPLOS E DIVISORES, MÁXIMO DIVISOR COMUM (M.D.C.), MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (M.M.C.) E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os números construídos com os algarismos de 0 a 9 são chamados de naturais. O símbolo desse conjunto é a letra N, e podemos escrever os seus elementos entre chaves:

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...}

As reticências indicam que esse conjunto tem infinitos números naturais.

O zero não é um número natural propriamente dito, pois não é um número de "contagem natural". Por isso, utiliza-se o símbolo N* para designar os números naturais positivos, isto é, excluindo o zero. Veja: N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...}.

Atenção! O símbolo do conjunto dos **números naturais é a letra N**. Além disso, podemos encontrar o **símbolo N***, que representa os números **naturais positivos**, isto é, **excluindo o zero**.

Conceitos básicos relacionados aos números naturais:

- **Sucessor**: é o próximo número natural. Ou seja, o sucessor do número "n" é o número "n+1".
    - **Exemplo**: o sucessor de 4 é 5, e o sucessor de 51 é 52.
- **Antecessor**: é o número natural anterior. Ou seja, o antecessor do número "n" é o número "n–1".
    - **Exemplo**: o antecessor de 8 é 7, e o antecessor de 77 é 76.
- **Números consecutivos**: são números em sequência. Assim, (n – 1, n e n+1) são números consecutivos.
    - **Exemplo**: 5, 6, 7 são números consecutivos, enquanto 10, 9, 11 não são.
- **Números naturais pares**: são aqueles que, quando divididos por 2, não deixam resto. Por isso, o zero também é considerado par. Assim, todos os números que terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8 são pares;
- **Números naturais ímpares**: quando divididos por 2, deixam resto 1. Todos os números que terminam em 1, 3, 5, 7 ou 9 são ímpares.

Atenção! A soma ou subtração de dois números pares tem resultado par.

- Ex.: 12 + 8 = 20; 12 – 8 = 4.

A soma ou subtração de dois números ímpares tem resultado par.

- Ex.: 13 + 7 = 20; 13 – 7 = 6.

A soma ou subtração de um número par com outro ímpar tem resultado ímpar.

- Ex.: 14 + 5 = 19; 14 – 5 = 9.

A multiplicação de números pares tem resultado par.

- Ex.: $8 \cdot 6 = 48$.

A multiplicação de números ímpares tem resultado ímpar.

- Ex.: $3 \cdot 7 = 21$.

A multiplicação de um número par por um número ímpar tem resultado par.

- Ex.: $4 \cdot 5 = 20$.

Números Primos

Um número natural é definido como número primo se tiver exatamente dois divisores: o número 1 e ele mesmo. Contudo, temos que, por definição, os números 0 e 1 não são números primos. Lembre-se de que o 2 é o único número par que também é primo!

Atenção! Não há consenso sobre haver ou não números primos negativos. Contudo, para seu conhecimento, o conceito de primalidade para números inteiros é diferente. O número p precisa ser divisível por 1, –1, p e –p, isto é, precisa ser dividido por 1, –1, por ele mesmo e pelo seu inverso.

Para identificar um número primo, é necessário analisar seus divisores. Para isto, vamos estudar um pouco mais a fundo múltiplos e divisores de um número.

Múltiplos e Divisores

Sejam dois números naturais x e y, temos que x é múltiplo de y quando existe um número natural z tal que $x = y \cdot z$.

Dessa maneira, temos que 30 é múltiplo de 3, uma vez que $3 \cdot z = 30$, em que z = 10. De mesma forma, 30 é múltiplo de 10, uma vez que $10 \cdot z = 30$, em que z = 3.

Vamos calcular alguns dos múltiplos de 2 multiplicando o 2 por todos os números naturais de 0 a 10.

$$2 \cdot 0 = 0$$
$$2 \cdot 1 = 2$$
$$2 \cdot 2 = 4$$
$$2 \cdot 3 = 6$$
$$2 \cdot 4 = 8$$
$$2 \cdot 5 = 10$$
$$2 \cdot 6 = 12$$
$$2 \cdot 7 = 14$$
$$2 \cdot 8 = 16$$
$$2 \cdot 9 = 18$$
$$2 \cdot 10 = 20$$

Assim, temos que o conjunto M dos múltiplos de 2 é M = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20...}.

Lembre-se de que o conjunto dos múltiplos é **infinito**!

Sejam dois números naturais **x** e **y**, temos que **x** é divisor de **y** quando existe um número natural z tal que z = $\frac{y}{x}$, de maneira que não haja resto na divisão.

Dessa maneira, temos que 5 é divisor de 300, uma vez que 300 ÷ 5 = z, tal que z = 60.

Para encontrarmos os divisores de um número, verificamos se o resultado da divisão é inteiro. Vejamos os divisores de 30:

$$30 \div 30 = 1$$
$$30 \div 15 = 2$$
$$30 \div 10 = 3$$
$$30 \div 6 = 5$$
$$30 \div 5 = 6$$
$$30 \div 3 = 10$$
$$30 \div 2 = 15$$
$$30 \div 1 = 30$$

Temos, então, que o conjunto D dos divisores de 30 é dado por D = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30}.

Perceba que, ao contrário do conjunto dos múltiplos, o conjunto dos divisores é finito.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Os múltiplos de um número X são aqueles números que podem ser obtidos multiplicando X por outro número natural. Assim, o MMC de dois ou mais números é o menor número positivo que é múltiplo comum de todos os números dados. Agora, observe os múltiplos dos números 4 e 6:

M (4) = 4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, **36**, ...
M (6) = 6, **12**, 18, **24**, 30, **36**, 42, ...

Quais são os múltiplos iguais (comuns) entre os números? São eles: 12, 24, 36... E qual o menor deles? É o número 12. Sendo assim, o número 12 é o menor múltiplo comum entre 4 e 6, ou seja, o MMC entre 4 e 6 é igual a 12.

- **Cálculo do MMC por Fatoração Simultânea**

Podemos calcular o MMC entre 2 ou mais números, de maneira mais rápida, fazendo a fatoração simultânea dos dois números. Veja:

Ex.: calcule o MMC entre 6 e 8.

6 – 8	2 (aqui devemos colocar o menor número primo)
3 – 4	2 (nesse caso repetimos o número 3, pois ele não é dividido pelo 2)
3 – 2	3
3 – 1	3
1 – 1	

MMC = 2 · 2 · 2 · 3 = 24.
Logo, o MMC (6 e 8) = 24.

Com esse método, é possível calcular o MMC entre vários números. Vamos exercitar novamente, dessa vez com mais números.

Ex.: calcule o MMC entre os números 10, 12, 20

10 – 12 – 20	2
5 – 6 – 10	2
5 – 3 – 5	3
5 – 1 – 5	5
1 – 1 – 1	

MMC = 2 · 2 · 3 · 5 = 60.
Logo, o MMC (10, 12 e 20) = 60.

- **Passos para Calcular o MMC (Fatoração Simultânea)**

Primeiramente, deve-se montar uma coluna para os fatores primos e outra coluna para cada um dos números. Em seguida, inicia-se a divisão dos números pelo menor fator primo (2), aumentando o fator apenas quando nenhum dos números puder mais ser dividido por ele.

Se algum dos números não puder ser dividido, basta copiá-lo para a próxima linha. O objetivo é fazer com que todos os números cheguem ao valor 1. O MMC será a multiplicação dos fatores primos utilizados.

Pensando além e analisando os tipos de questões que aparecem nas provas, é importante lembrar que os enunciados relacionados ao MMC geralmente envolvem uma ideia de periodicidade, repetição ou ciclo de acontecimentos. Veja um exemplo.

Em uma linha de montagem de fábrica, duas luzes de sinalização piscam em intervalos diferentes: uma a cada 20 minutos e a outra a cada 35 minutos. Se ambas piscarem juntas às 8 horas da manhã, em que horário isso voltará a acontecer?

Observe as expressões "a cada 20 minutos" e "a cada 35 minutos". Percebe-se, aqui, uma ideia de repetição. Por exemplo, se a luz que pisca a cada 20 minutos acender às 15h, ela irá piscar novamente após 20 minutos, ou seja, às 15h20, depois às 15h40, 16h, e assim por diante. Portanto, esse é um tipo clássico de questão envolvendo MMC.

Para resolvermos a questão anterior, devemos encontrar o MMC entre 20 e 30:

20, 35	2
10, 35	2
5, 35	5
1, 7	7
1, 1	

Portanto, MMC (20, 35) = 2 · 2 · 5 · 7 = 140.
Convertendo 140 para horas, temos:

140 min = 2 horas e 20 minutos, portanto:
8h + 2h20min = 10h20min

Assim, as luzes piscarão novamente às 10 horas e 20 minutos.

> **Dica**
>
> Atente aos termos "a cada", "em" e "ou" nos enunciados, pois estes podem indicar uma ideia de repetição, ciclo e periodicidade.

Revise seus conhecimentos por meio dos exercícios comentados a seguir.

1. **(FCC — 2015)** Para um evento promovido por uma determinada empresa, uma equipe de funcionários preparou uma apresentação de slides que deveria transcorrer durante um momento de confraternização. Tal apresentação é composta por 63 slides e cada um será projetado num telão por exatos 10 segundos. Foi ainda escolhida uma música de fundo, com duração de 4min40s para acompanhar a apresentação dos slides. Eles planejam que a música e a apresentação dos slides comecem simultaneamente e "rodem" ciclicamente, sem intervalos, até que ambas finalizem juntas. A fim de estudar a viabilidade desse plano, eles calcularam que a quantidade de vezes que a música teria de tocar até que seu final coincidisse, pela primeira vez depois do início, com final da apresentação seria

a) 5.
b) 42.
c) 12.
d) 35.
e) 9.

Slide = 630 segundos (63 · 10s);
Música = 280 segundos (4 · (60s + 40s)).
MMC:

630, 280	*2*
315, 140	*2*
315, 70	*2*
315, 35	*5*
63, 7	*7*
9, 1	*3*
3, 1	*3*
1, 1	

2 · 2 · 2 · 5 · 7 · 3 · 3 = 2.520
Logo, após 2.520 segundos, a música e o slide terminarão ao mesmo tempo.
Slide: 2520/630 = 4 voltas
Música: 2520/280 = 9 voltas.
Resposta: Letra E.

2. **(VUNESP — 2017)** Um comerciante possui uma caixa com várias canetas e irá colocá-las em pacotinhos, cada um deles com o mesmo número de canetas. É possível colocar, em cada pacotinho, ou 6 canetas, ou 8 canetas ou 9 canetas e, em qualquer dessas opções, não restará caneta alguma na caixa. Desse modo, o menor número de canetas que pode haver nessa caixa é

a) 70.
b) 66.
c) 64.
d) 72.
e) 68.

MMC (6,8,9):

6, 8, 9	*2*
3, 4, 9	*2*
3, 2, 9	*2*
3, 1, 9	*3*
1, 1, 3	*3*
1, 1, 1	

2 · 2 · 2 · 3 · 3 = 72 canetas.
Resposta: Letra D.

3. **(IBFC — 2018)** Um comerciante vende balas em pacotinhos, sempre com a mesma quantidade. Ao fazer isso, percebeu que dentre as balas que possuía poderia colocar 8, 12 ou 20 balas em cada pacote. Nessas condições, assinale a alternativa que apresenta o número mínimo de balas que o comerciante dispunha:

a) 120.
b) 240.
c) 360.
d) 60.

MMC (8, 12, 20):

8, 12, 20	*2*
4, 6, 10	*2*
2, 3, 5	*2*
1, 3, 5	*3*
1, 1, 5	*5*
1, 1, 1	

MMC = 2 · 2 · 2 · 3 · 5 = 120 balas.
Resposta: Letra A.

Máximo Divisor Comum (MDC)

O máximo divisor comum (MDC) corresponde ao maior número divisível entre dois ou mais números inteiros. Ou seja, o MDC de dois ou mais números é o maior número que é divisor comum de todos os números dados.

Os divisores comuns de 12 e 18 são 1, 2, 3 e 6. Dentre esses, o número maior é o 6. Sendo assim, o número 6 é o máximo divisor comum entre 12 e 18, ou seja, o MDC entre 12 e 18 é igual a 6.

- **Cálculo do MDC por Fatoração Simultânea**

Podemos calcular o MDC entre dois ou mais números utilizando a fatoração simultânea. É importante destacar que essa fatoração deve ser realizada até o momento em que o número 1 divida todos os números envolvidos ao mesmo tempo. Veja:

Ex.: calcule o MDC entre 60 e 45.

60 – 45	3 (note que 3 é o número que divide 60 e 45 ao mesmo tempo)
20 – 15	5 (note que 5 é o número que divide 20 e 15 ao mesmo tempo)
4 – 3	1 (aqui, encerramos a fatoração, pois o número 1 divide todos os outros ao mesmo tempo)

MDC = 3 · 5 · 1 = 15.
Logo, o MDC (60 e 45) = 15.

- **Passos para Calcular o MDC (Fatoração Simultânea)**

Inicialmente, é necessário montar uma coluna para os fatores primos e outra para cada um dos números. Em seguida, deve-se começar a dividir os números pelo fator primo que divide todos ao mesmo tempo. A fatoração deve ser interrompida quando o número 1 dividir todos os números simultaneamente. Por fim, o MDC será dado pela multiplicação dos fatores primos utilizados.

> **Dica**
>
> Embora sejam bastante semelhantes, o cálculo do MMC e do MDC tem diferenças importantes. Para não os confundir, lembre-se de que, ao calcular o MMC, fatoramos todos os números, mesmo que separadamente, até chegarmos ao "1". Já no cálculo do MDC, a fatoração é feita simultaneamente para todos os números, sem a necessidade de alcançar o "1".

Atente para o exercício comentado a seguir.

1. **(NOVA CONCURSOS)** Uma escola vai distribuir kits de material escolar para alunos de duas turmas. Na primeira turma, há 36 alunos, e na segunda turma, há 48 alunos. A escola quer dividir os kits em grupos com a mesma quantidade de alunos, de forma que cada grupo tenha o máximo número possível de alunos. Quantos grupos serão formados em cada turma?

a) 2 e 3.
b) 3 e 4.
c) 4 e 5.
d) 5 e 6.

Primeiramente, vamos descobrir qual o MDC entre 36 e 48:

36, 48	*2*
18, 24	*2*
9, 12	*3*
3 , 4	

Assim, MDC (36, 48) = 2 · 2 · 3 = 12
Portanto, cada grupo será formado por 12 alunos. Agora, vamos determinar quantos grupos haverá em cada sala:

$$\frac{36}{12} = 3$$

$$\frac{48}{12} = 4$$

Assim, cada grupo terá 12 alunos; em uma sala haverá 3 grupos, e na outra, 4 alunos.
Resposta: Letra B.

Indução Finita

A indução finita é uma técnica de prova matemática utilizada para mostrar que uma certa propriedade P(n) é verdadeira para todos os números naturais N a partir de um certo ponto. Esse teorema também é conhecido como o Princípio da Indução Finita (PIF). Observa-se a seguinte relação:

Seja P(n) uma propriedade descrita em termos de números naturais n. Suponha que as seguintes afirmações estejam satisfeitas:

- P(1) é válida.
- Se P(k) vale, então P(k + 1) também vale.

Nesse caso, então, P(n) é válida para todo $n \geq 1$.

Exemplo: a soma dos n primeiros números ímpares é igual a um quadrado perfeito?

$P(n) \rightarrow 1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$, para qualquer n pertencente ao conjunto dos números naturais inteiros positivos, com exceção do zero.

No caso do PIF, o ponto inicial é, geralmente, n = 1. O processo ocorre em duas etapas: processo base e o processo indutivo. Vejamos cada uma delas de forma mais explicada.

O **processo base** é aquele em que há a demonstração de que a propriedade é verdadeira para o primeiro valor de n — geralmente, n = 1. Isso é essencial para iniciar a cadeia de argumentos.

O **passo indutivo**, por sua vez, demonstra que se a propriedade é verdadeira para um número arbitrário n = k (hipótese de indução), então ela também deve ser verdadeira para o próximo número n = k + 1.

Se ambas as etapas forem provadas, podemos concluir que a propriedade P(n) é verdadeira para todos os n maiores ou iguais a 1.

Veja o exemplo a seguir:

Aplica-se, de maneira clássica, a indução finita para provar que a soma dos primeiros n números ímpares é sempre um quadrado perfeito. Em termos formais, a propriedade que desejamos provar é:

$$P(n) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Para calcular, é preciso seguir o passo a passo:

- **Processo base**: assumir que $P(n) = n^2$ para n = 1.

$$P(n) = 2n - 1$$
$$P(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

- **Passo indutivo**: assumir que a propriedade P(k) é verdadeira para um certo número k. Ou seja, assumimos que:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$$

Precisamos, agora, provar que a propriedade também é verdadeira para k + 1. Isso significa provar que:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

Podemos reescrever o lado esquerdo, utilizando a hipótese de indução:

$$k^2 + [2(k + 1) - 1]$$

Substituindo, temos:

$$k^2 + (2k + 2 - 1) = k^2 + 2k + 1$$

O que pode ser simplificado como:

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Isso confirma que P(k + 1) é verdadeira.

Portanto, como demonstramos que P(1) é verdadeira (passo base) e que P(k) implica P(k+1) (passo indutivo), podemos concluir que a soma dos primeiros n números ímpares é sempre um quadrado perfeito para qualquer n natural.

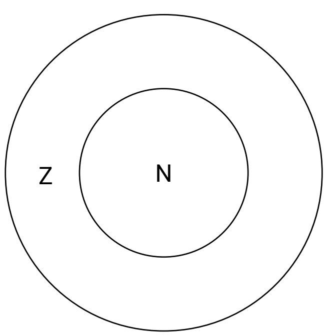
A indução finita, por sua vez, é uma ferramenta poderosa para provar a validade da propriedade para todos os elementos de um conjunto infinito a partir de um ponto inicial. No caso do exemplo, mostra-se que a propriedade P(n) é verdadeira para todos os números naturais n maiores ou iguais a 1.

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS: PROPRIEDADES, OPERAÇÕES, DIVISIBILIDADE, MÚLTIPLOS E DIVISORES E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os números inteiros são os números naturais — incluindo o zero — e seus respectivos opostos (negativos). Veja:

Z = {... –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}

O símbolo desse conjunto é a letra Z. Uma coisa importante é saber que todos os números naturais são inteiros, mas nem todos os números inteiros são naturais. Podemos representar os números inteiros por meio de diagramas e afirmar que o conjunto de números naturais está contido no conjunto de números inteiros, ou que N é um subconjunto de Z. Observe:



Podemos destacar alguns subconjuntos de números. Veja:

- **Números inteiros não negativos** ($\mathbb{Z}^+$) = {0, 1, 2, 3...}. Veja que estes são os números naturais;
- **Números inteiros não positivos** ($\mathbb{Z}^-$) = {... -3, -2, -1, 0}. Veja que o zero também faz parte deste conjunto, pois ele não é positivo nem negativo;
- **Números inteiros negativos** = {... –3, –2, –1}. O zero não faz parte;
- **Números inteiros positivos** = {1, 2, 3...}. Novamente, o zero não faz parte.

Operações com Números Inteiros

Há quatro operações básicas na matemática: adição, subtração, multiplicação e divisão. Essas operações são fundamentais para realizarmos cálculos em praticamente todas as questões de matemática. Por isso, é importante entendê-las bem. Vejamos cada uma delas.

- **Adição**

É dada pela soma de dois números positivos ou dois números negativos. Ou seja, a adição de 20 e 5 é: 20 + 5 = 25.

Siga os outros exemplos:

$$8 + 7 = 15$$
$$-4 - 6 = -10$$

É possível somar números de outra forma: escrevendo um abaixo do outro. Vejamos como ocorre a soma de 105 + 55:

$$\begin{array}{r} 105 \\ +\ 55 \\ \hline 160 \end{array}$$

- **Propriedades da Adição**

As propriedades da operação de adição precisam ser destacadas, de modo que se iniciam na forma **comutativa**, quando a ordem dos números não altera a soma. Observe:

115 + 35 é igual a 35 + 115

Outra propriedade é a **associativa**, que se refere à adição de três ou mais números. Ela permite somar dois deles primeiro e, em seguida, adicionar o terceiro, em qualquer ordem, sempre obtendo o mesmo resultado.

$$2 + 3 + 5 = (2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5) = 10$$

O **elemento neutro** refere-se à propriedade do zero na adição, já que qualquer número somado a zero permanece igual a si mesmo.

$$27 + 0 = 27; 55 + 0 = 55$$

Por fim, a última propriedade é o **fechamento**, que estabelece que a soma de dois números inteiros sempre resulta em outro número inteiro. Exemplo: a soma dos números inteiros 8 e 2 gera o número inteiro 10, pois 8 + 2 = 10.

- **Subtração**

Subtrair dois números equivale a diminuir o valor de um pelo outro, como somar um número negativo a um número positivo. Por exemplo, subtrair 7 de 20 significa retirar 7 de 20, restando 13, o que pode ser expresso como: 20 – 7 = 13. Vejamos mais alguns exemplos:

- subtrair 5 de 16: 16 – 5 = 11;
- 30 subtraído de 10: 30 – 10 = 20.

Ainda, a sua representação pode ser vertical, como exprime o exemplo:

$$\begin{array}{r} 90 \\ -\ 30 \\ \hline 60 \end{array}$$