Empresa Brasileira de Administração de Petróleo e Gás Natural

PPSA

Analista de Gestão Corporativa Finanças

NV-021JN-25-PPSA-ANALISTA-GEST-FINANCAS

SUMÁRIO

CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS

MATEMÁTICA FINANCEIRA

AUMENTO E DESCONTO

Como clientes, buscamos negociar preços de mercadorias ou produtos, com a intenção de ganhar um desconto no valor final. Já como empresários, o objetivo é movimentar o comércio, fazer inúmeras promoções com desconto nos produtos oferecendo diversas taxas ou porcentagem de desconto. Pode-se também ter a intenção de aumento, devido algum reajuste nos valores de insumos utilizados para produção. Essas são situações possíveis para uso de métodos percentuais de correção numérica.

Vamos analisar as seguintes situações hipotéticas para melhor fixarmos a teoria:

Um empresário precisa reajustar uma mercadoria que, de acordo com a inflação do período, sofreu um reajuste de 11% e sua mercadoria atualmente tem um custo para o cliente de R$ 500,00 reais. Então o custo atual tem uma referência em porcentagem de 100%. Se o ajuste será para aumentar o valor do produto em 11%, desta forma, o novo valor do produto corresponderá em: **100%+11%=111%, onde 111%=11÷100=1,11**, assim basta multiplicar o valor de referência da mercadoria por **1,11** e obtenha o valor dela corrigida com um aumento de **11%** inflacionário. Logo: **R$ 500,00 · 1,11= R$ 555,00,** ou seja, um aumento de **R$ 55,00** reais.

Com o mesmo raciocínio podemos fazer a aplicação de um desconto nessa mercadoria, sendo que agora o empresário fará uma promoção para alavancar as vendas desse produto, assim dando um desconto de 10% no valor dessa mercadoria de R$ 500,00 reais, temos então que o valor de referência dela continua sendo 100%. Se vai dar desconto, então a ideia agora não é de soma, mas sim de subtração. Desta forma temos: **100%–0%=90%,** então o valor a ser pago pelo produto é **90%** do valor original, **90%=90÷100=0,90,** assim basta multiplicar o valor de referência da mercadoria por **0,90** e obtenha o valor dela corrigida com um desconto de 10% promocional.

Logo: **R$ 500,00 ÷ 0,90=R$ 450,00**, ou seja, um desconto de **R$ 50,00** reais.

> **Dica**
>
> Perceba que o raciocínio para essas questões foi a regra de três. Se 100% representam R$ 500,00, quantos reais 111% representam?

JUROS SIMPLES

Alguns conceitos são importantes para o bom entendimento da matemática financeira. Assim, tem-se o conceito de **juros (J)** que é a remuneração do capital emprestado, podendo ser entendido, de forma simplificada, como sendo o aluguel pago pelo uso do dinheiro. Em outras palavras, juros é o rendimento pelo uso do capital financeiro em um determinado tempo a uma determinada taxa. Outro conceito é o de **valor presente ou capital (VP)** que é qualquer valor expresso em moeda corrente e disponível em determinada época, (também conhecido por) valor atual, valor de aquisição, valor na data zero, valor do empréstimo, valor financiado, capital, ou seja, valor do capital inicial.

Além dos juros, temos também a **taxa de juros (i)** que é a razão entre os juros recebidos (ou pagos) no final de certo período e o valor inicialmente aplicado (ou emprestado). Estas se referem sempre a uma unidade de tempo (mês, semestre, ano). Quando nos referimos às taxas, podem ser representadas percentualmente ou em decimal (por exemplo: **10%**=**0,10**). O tempo, número de períodos, quantidade de prestações, é chamado de **prazo (n)**, e deverá sempre estar compatível com a periodicidade da taxa de juros, assim, **n**=**0** é a data atual (hoje) ou início do 1º período, já **n**=**1** é o final do 1º período. De modo geral, o mercado trabalha com o ano comercial de 360 dias e o ano civil de 365 dias.

O **valor futuro ou montante (VP)** é um valor nominal de um título, valor residual de um bem, valor do capital acrescido de seus rendimentos, ou seja, é o valor acumulado ao final de **n** períodos de capitalização, à taxa de juros **i.** O **pagamento (PMT)** é o valor de cada parcela, prestação ou depósito. Normalmente é utilizado quando trabalhamos com série de pagamentos. A **data focal** é a data que se considera como base de comparação para valores referidos a datas diferentes.

Diagrama de Fluxo de Caixa

O **diagrama de fluxo de caixa**, figura 1, é de grande utilidade na matemática financeira, permitindo que se visualize no tempo o que ocorre com o capital (**VP**). Fluxo de caixa são movimentos monetários que são identificados temporalmente através de um conjunto de entradas e saídas de caixa.

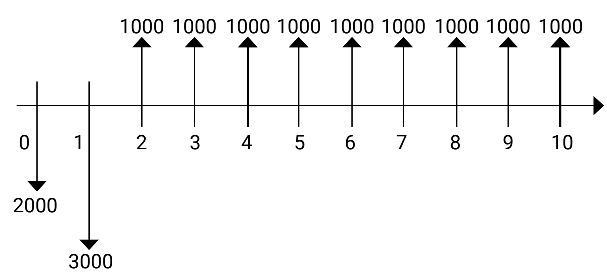

Figura 1: exemplo de diagrama de fluxo de caixa.

Os **critérios de capitalização de juros** demonstram como os juros são formados e sucessivamente incorporados ao capital no decorrer do tempo. São dois os regimes: simples (ou linear) e composto (ou exponencial). Começaremos a falar do juro simples, e posteriormente do juro composto.

No regime de capitalização simples, os juros crescem de forma linear ao longo do tempo. Neste critério, os juros incidem somente sobre o capital inicial (VP) da operação, não se registrando juros sobre o saldo dos juros acumulados.

Na utilização da capitalização simples, definimos os Juros (J) em função do valor presente (VP), da taxa de juro (i) e prazo (n):

$$J = VP \cdot i \cdot n$$

O valor futuro ou montante (VF) a ser pago então é dado pela soma do valor presente com o juro no período:

$$VF = VP + J$$

Substituindo (J) em (VF) temos:

$$VF = VP + J = VP + VP \cdot i \cdot n = VP \cdot (1 + in)$$

$$VF = VP \cdot (1 + in)$$

No caso do regime de capitalização simples os juros serão sempre constantes, pois são calculados sobre a mesma base de cálculo (capital inicial ou valor presente). Assim, não há acúmulo de juros ao capital para o cálculo dos novos juros dos períodos seguintes, por isso, dizemos que o crescimento do capital é linear (figura 2).

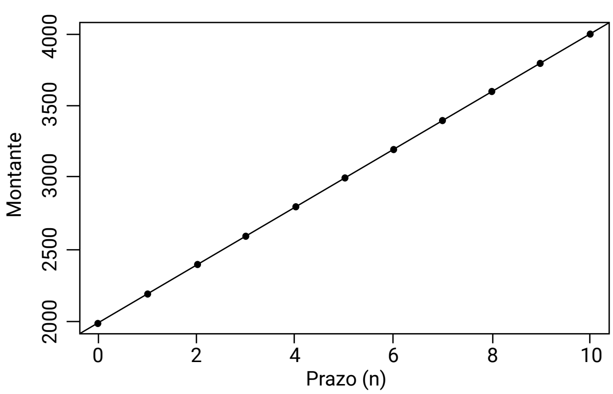

Figura 2: capitalização simples, com VP = R$ 2.000,00 e i = 10% ao mês, por 10 meses.

Assim, para encontrarmos os resultados da figura 2, utilizamos a fórmula do **montante** (VF) anterior e obtemos os valores mensais a serem pagos em cada mês à taxa de juros de 10%.

Observe:

VP = 2000; i = 0,10; n = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

$$VF = VP \cdot (1 + in)$$

$$n = 0 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 0) = 2000 \cdot 1 = 2000$$

$$n = 1 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 1) = 2000 \cdot 1,1 = 2200$$

$$n = 2 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 2) = 2000 \cdot 1,2 = 2400$$

$$n = 3 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 3) = 2000 \cdot 1,3 = 2600$$

$$n = 4 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 4) = 2000 \cdot 1,4 = 2800$$

$$n = 5 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 5) = 2000 \cdot 1,5 = 3000$$

$$n = 6 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 6) = 2000 \cdot 1,6 = 3200$$

$$n = 7 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 7) = 2000 \cdot 1,7 = 3400$$

$$n = 8 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 8) = 2000 \cdot 1,8 = 3600$$

$$n = 9 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 9) = 2000 \cdot 1,9 = 3800$$

$$n = 10 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0,1 \cdot 10) = 2000 \cdot 2 = 4000$$

Dica

No **juro simples,** o valor de incremento mensal referente à taxa de juro é **constante**, ou seja, mês a mês, o valor de aumento é o mesmo, basta fazer a diferença entre os montantes de um mês com o anterior, $VF_j - VF_{j-1}$.

O regime de capitalização simples é muito utilizado por países com baixo índice de inflação. No entanto, em países com alto índice de inflação, como exemplo, o Brasil, a sua utilização só faz sentido para curto prazo.

JUROS COMPOSTO

O regime de juros compostos considera que os juros formados em cada período são acrescidos ao capital, formando o montante (capital mais juros) do período. Este montante, por sua vez, passará a render juros no período seguinte formando um novo montante (constituído do capital inicial, dos juros acumulados e dos juros sobre os juros formados em períodos anteriores), e assim por diante.

Na utilização da capitalização composta, devemos utilizar a seguinte fórmula para o valor futuro:

$$VF = VP \cdot (1 + i)^n$$

sendo $(1 + i)^n$ o fator de capitalização e $\frac{1}{(1+i)^n}$ o fator de atualização.

Neste caso, note que o crescimento da capitalização composta não é linear como na capitalização simples, como pode ser observado na figura 3, o crescimento é exponencial.

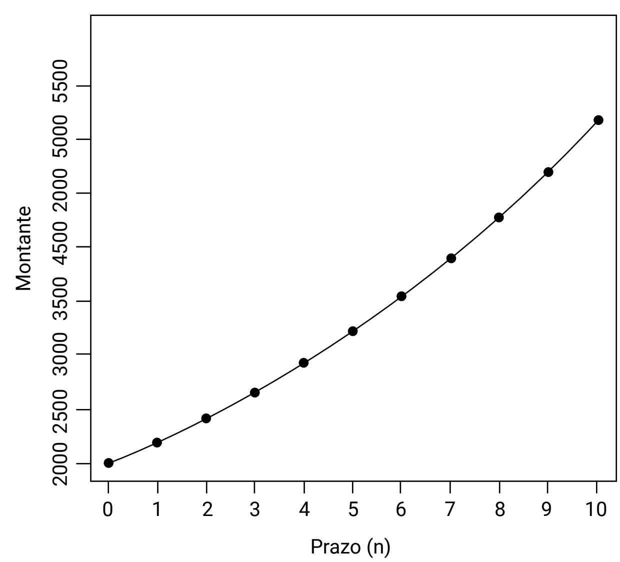

Figura 3: capitalização composta, com VP = R$2000,00 e i = 10% ao mês, por 10 meses.

Assim, para encontrar os resultados da figura 3, utilizamos a fórmula do **montante** (VF) anterior e obtemos os valores mensais a serem pagos em cada mês à taxa de juro de 10%, com correção composta, ou seja, juro do tempo *j* em relação ao montante *j-1*.

$$VP = 2000;\ i = 0{,}10;\ n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$VF = VP \cdot (1 + i)^n$$

$$n = 0 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^0 = 2000 \cdot 1 = 2000$$

$$n = 1 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^1 = 2000 \cdot 1{,}1 = 2200$$

$$n = 2 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^2 = 2000 \cdot 1{,}21 = 2420$$

$$n = 3 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^3 = 2000 \cdot 1{,}331 = 2662$$

$$n = 4 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^4 = 2000 \cdot 1{,}464 = 2928{,}2$$

$$n = 5 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^5 = 2000 \cdot 1{,}6105 = 3221{,}02$$

$$n = 6 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^6 = 2000 \cdot 1{,}7716 = 3543{,}122$$

$$n = 7 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^7 = 2000 \cdot 1{,}9487 = 3897{,}434$$

$$n = 8 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^8 = 2000 \cdot 2{,}1463 = 4287{,}178$$

$$n = 9 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^9 = 2000 \cdot 2{,}3579 = 4715{,}895$$

$$n = 10 \rightarrow VF = 2000 \cdot (1 + 0{,}1)^{10} = 2000 \cdot 2{,}5937 = 5187{,}485$$

Importante!

O regime de capitalização composta é amplamente adotado por todo mercado financeiro. Sua importância é fundamental para o entendimento de praticamente todas as operações financeiras que são realizadas. Cabe destacar que, em comparação com o regime de capitalização simples, para o primeiro período de capitalização não difere a escolha de juros simples ou compostos, pois ambos os juros produzidos se igualam.

MONTANTE

Resumindo então temos a fórmula do montante para juros simples:

$$M = VF = VP \cdot (1 + in).$$

E o montante para juros compostos:

$$M = VF = VP \cdot (1 + in)^n.$$

A seguir, revise seus conhecimentos com alguns exercícios comentados.

1. **(FCC 2019)** Em uma determinada data, Henrique recebeu, por serviços prestados a uma empresa, o valor de R$ 20.000,00. Gastou 37,5% dessa quantia e o restante aplicou a juros simples, a uma taxa de 18% ao ano. Se no final do período de aplicação ele resgatou o montante correspondente de R$ 14.000,00, significa que o período dessa aplicação foi de:

a) 1 trimestre
b) 10 meses
c) 1 semestre
d) 8 meses
e) 1 ano e 2 meses

Do total que Henrique recebeu, ele gastou 37,5% e aplicou 62,5%, isto é, R$20.000,00 37,5% = R$12.500,00. Sabemos, pelas informações do enunciado, que o juro anual era de 18%, isto é, de 1,5% ao mês e que o montante (M) foi de R$14.000,00. A questão nos pede para descobrir o prazo (n) de aplicação. Assim, pela fórmula, temos:

$J = M - VP \rightarrow J = 14.000 - 12.500 \rightarrow J = 1.500$

$J = Cin \rightarrow 1.500 = 12.500 * 0{,}015.n \rightarrow 1500 = 187{,}5n \rightarrow$

$\frac{1500}{187,5} = n$

$n = 8$ *meses*

Resposta: Letra D.

2. **(FCC — 2016)** Uma pessoa deseja investir em um imobilizado para a sua loja e o fornecedor lhe ofereceu as seguintes condições:

a. Preço à vista: R$ 1.800,00;
b. Preço a prazo: entrada de R$ 300,00 e R$ 1.650,00 em 60 dias.
A taxa de juros simples mensal cobrada pelo fornecedor, na venda a prazo foi de:

a) 5,5% a.m.
b) 4,88% a.m.
c) 4,17% a.m.
d) 5,00% a.m.
e) 8,33% a.m.

Após pagar R$300,00 de entrada, o capital VP é de R$1500,00 e o montante VF é de R$1650,00. O prazo foi de 2 meses (n=2), assim, a taxa de juro (i) é dada por:

$VF = VP \cdot (1 + in)$
$1650 = 1500 \cdot (1 + 2i)$
$1650 = 1500 + 3000i$
$1650 - 1500 = 3000i$

$i = \frac{150}{3000} = 0{,}05 = 5{,}00\%$ *" a.m"*

Resposta: Letra D.

3. **(FCC — 2018)** A Cia. Endividada tinha que liquidar uma dívida no valor de R$ 200.000,00 em determinada data, porém precisou negociar a prorrogação do prazo de pagamento por não dispor de liquidez. O credor aceitou prorrogar o pagamento por 90 dias e negociou a remuneração com uma taxa de juros compostos de 2% ao mês. O valor devido pela Cia. Endividada, no final do prazo de prorrogação, foi, em reais:

a) 216.486,43
b) 212.000,00
c) 212.241,60
d) 208.080,00
e) 216.000,00

Sabe-se que o capital (VP) foi de R$200.000,00 reais, o prazo foi de 90 dias, que transformando em meses é 3 (n = 3). A taxa de juro composto foi de 2% = 0,02 ao mês, assim, o montante (VF) é dado por:

$VF = VP \cdot (1 + i)^n$
$VF = 200000 \cdot (1 + 0{,}02)^3$
$VF = 200000 \cdot (1{,}02)^3$
$VF = 200000 \cdot 1{,}06121$
$VF = 212.241{,}60$
Resposta: Letra C.

4. (FCC — 2017) Um empréstimo com juros compostos de 1,2% ao mês corresponde a uma taxa anual de:

a) (1,1212 – 1) · 100%
b) (1,10212 – 1) · 100%
c) (1,01212 – 1) · 100%
d) (1,001212 – 1) · 100%
e) (1,1001212 – 1) · 100%

Sabe-se que a taxa de juro mensal é de i = 1,2% = 0,012. Com prazo de 1 ano temos n = 12 meses. Assim sabemos que o juro é dado por J = VF – VP e por ser composto temos também:

$VF = VP \cdot (1 + i)^n \rightarrow VF = VP \cdot (1 + 0{,}012)^{12} \rightarrow VF = VP \cdot (1{,}012)^{12}$

então:

$J = FV - VP$

$J = VP \cdot (1{,}012)^{12} - VP$

$J = VP \cdot (1{,}\ 012^{12} - 1)$

Assim, a taxa anual é dada por $(1{,}012^{12} - 1) \cdot 100\%$*. Resposta: Letra C.*

REFERÊNCIAS

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. 3 v.
IEZZI, G. *et al*. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 3. ed. São Paulo: Atual, 1977. 10 v.
______. **Matemática: ciência e aplicações**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. 3 v.
LEONARDO, F. M. *et al*. **Conexões com a Matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. 3 v.
PAIVA, M. R. **Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010. 3 v.
SOUZA, J. R. GARCIA, J. S. R. **#Contato Matemática**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016. 3 v.

ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

VALOR ATUAL E VALOR FUTURO

O conceito de valor atual, ou valor presente, refere-se à quantia de dinheiro que uma série de fluxos de caixa futuros vale hoje, considerando-se uma taxa de juros para o desconto.

Trata-se de uma ferramenta essencial na análise de investimentos, pois permite comparar valores ao longo do tempo, ajustando o valor do dinheiro à sua capacidade de gerar juros. Assim, o cálculo do valor atual é utilizado para determinar se um investimento futuro compensa em relação ao seu custo presente.

Quando estudamos juros compostos, a fórmula para encontrar o capital, a partir do montante, é dada por:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Deixando o capital C em evidência:

$$C = \frac{M}{(1+i)^n}$$

Ou, ainda:

$$C = M \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$$

O fator é chamado de fator de acumulação de capital ou de fator de juros compostos ou, ainda, de fator de capitalização, sendo representado por:

$$a_n = (1 + i)^n$$

Esse fator é importante e pode aparecer em sua prova, juntamente com a tabela financeira a seguir, que apresenta alguns valores para **n** e **i**, facilitando os cálculos.

N/I	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	15%	18%
1	1,010000	1,020000	1,030000	1,040000	1,050000	1,060000	1,070000	1,08000	1,09000	1,100000	1,120000	1,150000	1,180000
2	1,020100	1,040400	1,060900	1,081600	1,102500	1,102500	1,144900	1,166400	1,188100	1,210000	1,254400	1,32250	1,392400
3	1,030301	1,061208	1,092727	1,124864	1,157625	1,157625	1,225043	1,259712	1,295029	1,331000	1,404928	1,520875	1,643032
4	1,040604	1,082432	1,125508	1,169858	1,215506	1,215506	1,310796	1,360488	1,411581	1,464100	1,573519	1,749006	1,938777
5	1,051010	1,104081	1,159274	1,216652	1,276281	1,276281	1,402552	1,469329	1,538624	1,610510	1,762341	2,011357	2,287758
6	1,061520	1,126162	1,194052	1,265319	1,340095	1,340095	1,500730	1,586874	1,677100	1,771561	1,973822	2,313061	2,699554
7	1,072135	1,148685	1,229873	1,315931	1,407100	1,407100	1,605781	1,713824	1,828039	1,948717	2,210681	2,660020	3,185474
8	1,082856	1,171659	1,266770	1,368569	1,477455	1,477455	1,718186	1,850930	1,992562	2,143588	2,475963	3,059023	3,758859
9	1,093685	1,195092	1,304773	1,423311	1,551328	1,551328	1,838459	1,999004	2,171893	2,357947	2,773078	3,517876	4,435454
10	1,104622	1,218994	1,343916	1,480244	1,628894	1,628894	1,967151	2,158925	2,367363	2,593742	3,105848	4,045558	5,233835
11	1,115668	1,243374	1,384233	1,539454	1,710339	1,710339	2,104852	2,331639	2,580426	2,853116	3,478549	4,652391	6,175926
12	1,126825	1,268242	1,425760	1,601032	1,795856	1,795856	2,252191	2,518170	2,812665	3,138428	3,895975	5,350250	7,287592
13	1,138093	1,293606	1,468533	1,665073	1,885649	1,885649	2,409845	2,719623	3,065804	3,452271	4,363493	6,152787	8,599359
14	1,149474	1,319479	1,512589	1,731676	1,979931	1,979931	2,578534	2,937193	3,341727	3,797498	4,887112	7,075706	10,147244
15	1,160969	1,345868	1,557967	1,800943	2,078928	2,078928	2,759031	3,172169	3,642482	4,177248	5,473565	8,137061	11,973748
16	1,172578	1,372786	1,604706	1,872981	2,182874	2,182874	2,952164	3,425942	3,970306	4,594972	6,130393	9,354621	14,129022
17	1,184304	1,400241	1,652847	1,947900	2,292018	2,292018	3,158815	3,700018	4,327633	5,054470	6,866040	10,761264	16,672246
18	1,196147	1,428246	1,702433	2,025816	2,406619	2,406619	3,379932	3,996019	4,717120	5,559917	7,689966	12,375453	19,673251

A função principal de uma tabela financeira é disponibilizar valores numéricos que seriam complexos de calcular manualmente, pois os cálculos com juros compostos sempre envolvem exponenciação. A interpretação da tabela é simples: basta localizar a linha correspondente ao prazo e cruzá-la com a coluna da taxa de juros desejada. Nesse ponto, encontraremos um número específico, ou, de forma mais precisa, um fator.

Note que a primeira célula da tabela, no canto superior esquerdo, é **n/i**. Isso significa que, na primeira coluna à esquerda (1, 2, 3, 4, ..., 18), estão indicados os respectivos períodos **n**. Já na primeira linha, encontram-se as taxas em percentual (1%, 2%, ..., 18%). Além disso, há outro elemento derivado do fator anterior.

Denomina-se $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(1+i)^n}$ o fator de atualizações de capital, ou fator de desconto composto. Alguns de seus valores podem ser dados no enunciado, ou apresentados em uma tabela.

Podemos sintetizar, também, a seguinte relação:

$$\text{Fator de recuperação de capital} = \frac{1}{\text{Fator de valor atual}}$$

Assim, tendo em vista esses fatos, podemos adaptar as variáveis para o nosso propósito de calcular o valor atual (ou valor presente) de qualquer quantia.

Chamando o capital C de VP (valor presente ou valor atual), percebe-se que o montante M representa o valor futuro (VF). Por isso, aquele será chamado, agora, de VF. Desse modo, temos a nossa fórmula para calcular o valor atual:

$$\mathrm{VP} = \frac{\mathrm{VF}}{(1+i)^n}$$

Ou, ainda,

$$\mathrm{VF} = \mathrm{VP} \cdot (1+i)^n$$

Assim, não importa se temos o valor presente (**VP**) e precisamos encontrar o valor futuro (**VF**), se temos o valor futuro (**VF**) e precisamos determinar o valor presente (**VP**), ou mesmo se desejamos calcular a taxa (**i**) ou o número de períodos. As duas fórmulas mencionadas (uma decorrente da outra) podem ser aplicadas em todas essas situações.

Vejamos o exercício comentado a seguir:

1. (FGV — 2021) Um televisor pode ser adquirido à vista ou por meio de 3 prestações mensais, iguais e consecutivas, no valor de R$ 2.704,00, sendo a primeira delas paga no ato da compra.
Se o vendedor cobra juros de 4% a.m. nas transações a prazo, o valor à vista do televisor é:

a) R$ 7.800,00;
b) R$ 7.801,00;
c) R$ 7.802,00;
d) R$ 7.803,00;
e) R$ 7.804,00.

Quando a questão solicita o preço à vista, precisamos calcular o valor atual. Esse cálculo pode ser realizado por meio da seguinte fórmula:

$$\mathrm{VP} = \frac{\mathrm{VF}}{(1+i)^n}$$