Secretaria da Educação do Espírito Santo

SEDU-ES

Agente de Suporte Educacional

NV-022DZ-24-SEDU-ES-AGENTE-SUP-EDUC
Cód.: 7908428810900

SUMÁRIO

NOÇÕES DE MATEMÁTICA E RACIOCÍNIO LÓGICO

RAZÕES E PROPORÇÕES

A razão entre duas grandezas é igual à divisão entre elas. Veja: $\frac{2}{5}$ (ou podemos representar por 2 ÷ 5) (lê-se "2 está para 5").

Já a proporção é a igualdade entre razões. Veja: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$(ou podemos representar por 2 ÷ 3 = 4 ÷ 6) (lê-se "2 está para 3 assim como 4 está para 6").

Os problemas mais comuns que envolvem razão e proporção aparecem quando se aplica uma "variável" qualquer dentro da proporcionalidade buscando saber seu valor. Veja o exemplo: $\frac{2}{3} = \frac{x}{6}$ ou 2 ÷ 3 = x ÷ 6.

Para resolvermos esse tipo de problema, devemos usar a propriedade fundamental da razão e proporção: "produto dos meios pelos extremos".

- **Meio**: 3 e x;
- **Extremos**: 2 e 6.

Logo, devemos fazer a multiplicação entre eles numa igualdade. Observe:

$$3 \cdot x = 2 \cdot 6$$
$$3x = 12$$
$$x = 12 \div 3$$
$$x = 4$$

Lembre-se de que a maioria dos problemas envolvendo esse tema é resolvida utilizando essa propriedade fundamental. Porém, algumas questões acabam sendo um pouco mais complexas. Sendo assim, pode ser útil conhecer algumas propriedades para facilitar. Vamos a elas.

PROPRIEDADE DAS PROPORÇÕES

Somas Externas

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Vamos entender um pouco melhor resolvendo um questão-exemplo: suponha que uma fábrica vai distribuir um prêmio de R$ 10 mil para seus dois empregados (Carlos e Diego). Esse prêmio vai ser dividido de forma proporcional ao seu tempo de serviço na fábrica. Carlos está há três anos na fábrica e Diego está há dois anos na fábrica. Quanto cada um vai receber?

Primeiro, devemos montar a proporção. Sendo C a quantia que Carlos vai receber e D a quantia que Diego vai receber, temos:

$$\frac{c}{3} = \frac{d}{2}$$

Utilizando a propriedade das somas externas:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{C+D}{3+2}$$

Perceba que C + D = 10.000 (as partes somadas), então podemos substituir na proporção:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{C+D}{3+2} = \frac{10.000}{5} = 2.000$$

Aqui, cabe uma observação importante. Esse valor, 2.000, que chamamos de "constante de proporcionalidade", é que nos mostra o valor real das partes dentro da proporção. Veja:

$$\frac{C}{3} = 2.000$$
$$C = 2.000 \cdot 3$$
C = 6.000 (esse é o valor de Carlos)

$$\frac{D}{2} = 2.000$$
$$D = 2.000 \cdot 2$$
D = 4.000 (esse é o valor de Diego)

Assim, Carlos vai receber R$ 6 mil e Diego vai receber R$ 4 mil.

Somas Internas

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

É possível, ainda, trocar o numerador pelo denominador ao efetuar essa soma interna, desde que o mesmo procedimento seja feito do outro lado da proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

Vejamos um exemplo:

$$\frac{x}{14-x} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{x+14-x}{x} = \frac{2+5}{2}$$
$$\frac{14}{x} = \frac{7}{2}$$
$$7 \cdot x = 2 \cdot 14$$
$$X = \frac{14 \cdot 2}{7} = 4$$

Portanto, encontramos que x = 4.

Observação: vale lembrar que essa propriedade também serve para subtrações internas.

Soma com Produto por Escalar

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+2b}{b} = \frac{c+2d}{d}$$

Vejamos um exemplo para melhor entendimento: uma empresa vai dividir o prêmio de R$ 13 mil proporcionalmente ao número de anos trabalhados. São dois funcionários que trabalham há dois anos na empresa e três funcionários que trabalham há três anos.

Sendo A o prêmio dos funcionários com dois anos e B, o prêmio dos funcionários com três anos de empresa, temos:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3}$$

Porém, como são dois funcionários na categoria A e três funcionários na categoria B, podemos escrever que a soma total dos prêmios é igual a R$ 13 mil.

$$2A + 3B = 13.000$$

Agora, multiplicando em cima e embaixo de um lado por 2 e do outro lado por 3, temos:

$$\frac{2A}{4} = \frac{3B}{9}$$

Aplicando a propriedade das somas externas, podemos escrever o seguinte:

$$\frac{2A}{4} = \frac{3B}{9} = \frac{2A+3B}{4+9}$$

Substituindo o valor da equação 2A + 3B na proporção, temos:

$$\frac{2A}{4} = \frac{3B}{9} = \frac{2A+3B}{4+9} = \frac{13.000}{13} = 1.000$$

Logo,

$$\frac{2A}{4} = 1.000$$

$$2A = 4 \cdot 1.000$$
$$2A = 4.000$$
$$A = 2.000$$

Fazendo a mesma resolução em B:

$$\frac{3B}{9} = 1.000$$
$$3B = 9 \cdot 1.000$$
$$3B = 9.000$$
$$B = 3.000$$

Sendo assim, os funcionários com dois anos de casa receberão R$ 2 mil de bônus. Já os funcionários com três anos de casa receberão R$ 3 mil de bônus.

O total pago pela empresa será: $2 \cdot 2.000 + 3 \cdot 3.000 = 4.000 + 9.000 = 13.000$.

Agora, vamos estudar um tipo de problema envolvendo razão e proporção que aparece frequentemente em provas de concursos.

DIVISÃO PROPORCIONAL

Diretamente Proporcional

Um dos tópicos mais comuns em questões de prova é “dividir uma determinada quantia em partes proporcionais a determinados números”. Vejamos um exemplo para entendermos melhor como esse assunto é cobrado.

A quantia de R$ 900 mil deve ser dividida em partes proporcionais aos números 4, 5 e 6. A menor dessas partes corresponde a...

Primeiro, vamos chamar de X, Y e Z as partes proporcionais, respectivamente 4, 5 e 6. Sendo assim, X é proporcional a 4, Y é proporcional a 5 e Z é proporcional a 6, ou seja, podemos representar na forma de razão. Veja: $\frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{Z}{6}$ = constante de proporcionalidade.

Usando uma das propriedades da proporção, somas externas, temos:

$$\frac{X+Y+Z}{4+5+6} = \frac{900.000}{15} = 60.000$$

A menor dessas partes é aquela que é proporcional a 4, logo:

$$\frac{X}{4} = 60.000$$

$$X = 60.000 \cdot 4$$
$$X = 240.000$$

Inversamente Proporcional

É um tipo de questão menos recorrente, mas não menos importante. Consiste em distribuir uma quantia X a três pessoas, de modo que cada uma receba uma quantidade inversamente proporcional a três números. Vejamos um exemplo: suponha que queiramos dividir 740 mil em partes inversamente proporcionais a 4, 5 e 6.

Vamos chamar de X as quantias que devem ser distribuídas inversamente proporcionais a 4, 5 e 6, respectivamente. Devemos somar as razões e igualar ao total que dever ser distribuído para facilitar o nosso cálculo. Veja:

$$\frac{X}{4} + \frac{X}{5} + \frac{X}{6} = 740.000$$

Agora, vamos precisar tirar o MMC (mínimo múltiplo comum) entre os denominadores para resolvermos a fração.

4 – 5 – 6 | 2

2 – 5 – 3 | 2

1 – 5 – 3 | 3

1 – 5 – 1 | 5

1 – 1 – 1 | 2 · 2 · 3 · 5 = 60

Assim, dividindo o MMC pelo denominador e multiplicando o resultado pelo numerador, temos:

$$\frac{15X}{60} + \frac{12X}{60} + \frac{10X}{60} = 740.000$$

$$\frac{37X}{60} = 740.000$$

$$X = 1.200.000$$

Agora, basta substituir o valor de X nas razões para achar cada parte da divisão inversa.

$\frac{X}{4} = \frac{1.200.000}{4} = 300.000$

$\frac{X}{5} = \frac{1.200.000}{5} = 240.000$

$\frac{X}{6} = \frac{1.200.000}{6} = 200.000$

Logo, as partes divididas inversamente proporcionais aos números 4, 5 e 6 são, respectivamente, 300.000, 240.000 e 200.000

1. **(FGV — 2022)** Em um grupo de 32 pessoas, há 8 mulheres a mais do que homens.

   É correto concluir que, nesse grupo

a) para cada 3 mulheres há 1 homem.
b) para cada 3 mulheres há 2 homens.
c) para cada 4 mulheres há 3 homens.
d) para cada 5 mulheres há 2 homens.
e) para cada 5 mulheres há 3 homens.

Para facilitar nossos cálculos, utilizaremos m para representar o número de mulheres e h para representar o número de homens. Pelo enunciado da questão, sabemos que o grupo contém 32 pessoas, então m + h= 32. Além disso, sabemos que há oito mulheres a mais do que homens, portanto m = 8 + h. Juntando as duas equações, temos que:
(8 + h) + h = 32
8 + 2·h = 32
2·h = 32 – 8
2·h = 24
h = 24 ÷ 2
h = 12
Como sabemos que m = 8 + h e h = 12:
m = 8 + 12
m = 20.
Fazendo uma relação entre o número de homens e o número de mulheres, temos que:
20 – 12
5 – 3
Assim, sabemos que, para cada cinco mulheres, há três homens. Resposta: Letra E.

2. **(VUNESP — 2020)** Em um grupo com somente pessoas com idades de 20 e 21 anos, a razão entre o número de pessoas com 20 anos e o número de pessoas com 21 anos, atualmente, é 4 ÷ 5. No próximo mês, duas pessoas com 20 anos farão aniversário, assim como uma pessoa com 21 anos, e a razão em questão passará a ser de 5 ÷ 8. O número total de pessoas nesse grupo é

a) 30.
b) 29.
c) 28.
d) 27.
e) 26.

A razão entre o número de pessoas com 20 anos e o número de pessoas com 21 anos, atualmente, é 4 ÷ 5.
$\frac{I20}{I21} = \frac{4x}{5x}$ *total de 9x.*
No próximo mês, duas pessoas com 20 anos farão aniversário, assim como uma pessoa com 21 anos, e a razão em questão passará a ser de 5 ÷ 8.

$\frac{I20}{I21} = \frac{4x-2}{5x+2-1} = \frac{5}{8}$

$\frac{4x-2}{5x+1} = \frac{5}{8}$

8 (4x – 2) = 5 (5x + 1)
32x – 16 = 25x + 5
7x = 21
x = 3
Para sabermos o total de pessoas, basta substituir o valor de x na primeira equação:
9x = 9 · 3 = 27 é o número total de pessoas nesse grupo. Resposta: Letra D.

3. **(IBADE — 2018)** Três agentes penitenciários de um país qualquer, Darlan, Arley e Wanderson, recebem juntos, por dia, R$ 721,00. Arley recebe R$ 36,00 mais que o Darlan, Wanderson recebe R$ 44,00 menos que o Arley. Assinale a alternativa que representa a diária de cada um, em ordem crescente de valores.

a) R$ 249,00, R$ 213,00 e R$ 169,00.
b) R$ 169,00, R$ 213,00 e R$ 249,00.
c) R$ 145,00, R$ 228,00 e R$ 348,00.
d) R$ 223,00, R$ 231,00 e R$ 267,00
e) R$ 267,00, R$ 231,00 e R$ 223,00.

D + A + W = 721
A = D + 36
W = A – 44
Substituímos Arley em Wanderson:
W= A – 44
W= 36 + D – 44
W= D – 8
Substituímos na fórmula principal:
D + A + W = 721
D + D + 36 + D – 8 = 721
3D + 28 = 721
3D = 721 – 28
3D = 693
D = 693 ÷ 3
D = 231
Substituímos o valor de D nas outras:
A = D + 36
A= 231 + 36= 267
W = A – 44
W = 267 – 44 = 223
Logo, os valores em ordem crescente que Wanderson, Darlan e Arley recebem são, respectivamente, R$ 223, R$ 231 e R$ 267. Resposta: Letra D.

4. **(CEBRASPE-CESPE — 2018)** A respeito de razões, proporções e inequações, julgue o item seguinte.
   Situação hipotética: Vanda, Sandra e Maura receberam R$ 7.900 do gerente do departamento onde trabalham, para ser divido entre elas, de forma inversamente proporcional a 1 ÷ 6, 2 ÷ 9 e 3 ÷ 8, respectivamente. Assertiva: Nessa situação, Sandra deverá receber menos de R$ 2.500.

( ) CERTO ( ) ERRADO

$\frac{6x}{1} + \frac{9x}{2} + \frac{8x}{3} = 7.900$

Tirando o MMC entre 1, 2 e 3, vamos achar 6. Temos:

$\frac{36x}{6} + \frac{27x}{6} + \frac{16x}{6} = 7.900$

$\frac{79x}{6} = 7.900$

$x = 600$

Sendo assim, Sandra está inversamente proporcional a $\frac{9x}{2}$*. Basta substituirmos o valor de x na proporção.*

$\frac{9x}{2} = \frac{9x600}{2} = 2.700$ *(valor que Sandra irá receber é maior que 2.500). Resposta: Errado.*

5. **(IESES — 2019)** Uma escola possui 396 alunos matriculados. Se a razão entre meninos e meninas foi de 5 ÷ 7, determine o número de meninos matriculados.

a) 183.
b) 225.
c) 165.
d) 154.

Total de alunos = 396
Meninos = H
Meninas = M
Razão: $\frac{H}{M} = \frac{5x}{7x}$ =
Agora, vamos somar 5x com 7x = 12x.
12x é igual ao total, que é 396.
12x = 396
x = 33
Portanto, o número de meninos será:
Meninos = 5x = 5 · 33 = 165. Resposta: Letra C.

6. **(CEBRASPE-CESPE — 2019)** No item seguinte apresenta uma situação hipotética, seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de proporcionalidade, porcentagens e descontos.
No primeiro dia de abril, o casal Marcos e Paula comprou alimentos em quantidades suficientes para que eles e seus dois filhos consumissem durante os 30 dias do mês. No dia 7 desse mês, um casal de amigos chegou de surpresa para passar o restante do mês com a família. Nessa situação, se cada uma dessas seis pessoas consumir diariamente a mesma quantidade de alimentos, os alimentos comprados pelo casal acabarão antes do dia 20 do mesmo mês.

( ) CERTO ( ) ERRADO

4 pessoas ------- 24 dias
6 pessoas ------- x dias
Temos grandezas inversas, então é só multiplicar na horizontal:
6x = 4 · 24
6x = 96
x = 96 ÷ 6
x = 16
Como já haviam comido por 6 dias, é só somar:
6 dias (consumidos por 4) + 16 dias (consumidos por 6) = 22 dias (a comida acabará no dia 22 de abril). Resposta: Errado.

REGRA DE TRÊS SIMPLES

A regra de três simples envolve apenas duas grandezas. São elas:

- **Grandeza dependente**: é aquela cujo valor se deseja calcular a partir da grandeza explicativa;
- **Grandeza explicativa ou independente**: é aquela utilizada para calcular a variação da grandeza dependente.

Existem dois tipos principais de proporcionalidades que aparecem frequentemente em provas de concursos públicos. Veja a seguir:

- **Grandezas diretamente proporcionais**: o aumento de uma grandeza implica o aumento da outra;
- **Grandezas inversamente proporcionais**: o aumento de uma grandeza implica a redução da outra.

Vamos esquematizar para sabermos quando será direta ou inversamente proporcional:

DIRETAMENTE PROPORCIONAL → + / + OU – / –

No fluxograma anterior, as grandezas aumentam ou diminuem juntas (sinais iguais).

INVERSAMENTE PROPORCIONAL → + / – OU – / +

No fluxograma anterior, uma grandeza aumenta e a outra diminui (sinais diferentes).

Agora, vamos esquematizar a maneira como iremos resolver os diversos problemas:

DIRETAMENTE PROPORCIONAL → MULTIPLICA CRUZADO

INVERSAMENTE PROPORCIONAL → MULTIPLICA NA HORIZONTAL

Vejamos alguns exemplos para fixarmos um pouco mais como isso tudo funciona.

Exemplo 1: um muro de 12 m foi construído utilizando 2.160 tijolos. Caso queira construir um muro de 30 m nas mesmas condições do anterior, quantos tijolos serão necessários?

Primeiro, vamos montar a relação entre as grandezas e, depois, identificar se é direta ou inversamente proporcional.

12 m -------- 2.160 (tijolos)

30 m -------- x (tijolos)

Veja que de, 12 m para 30 m, tivemos um aumento (+) e que, para fazermos um muro maior, vamos precisar de mais tijolos, ou seja, também deverá ser aumentado (+). Logo, as grandezas são diretamente proporcionais; resolveremos multiplicando cruzado. Observe:

12 m -------- 2.160 (tijolos)

30 m -------- x (tijolos)

12 · x = 30 · 2.160

12x = 64.800

x = 5.400 tijolos

Assim, comprovamos que realmente são necessários mais tijolos.

Exemplo 2: uma equipe de cinco professores gastou 12 dias para corrigir as provas de um vestibular. Considerando a mesma proporção, quantos dias levarão 30 professores para corrigir as provas?

Do mesmo jeito que no exemplo anterior, vamos montar a relação e analisar:

5 (professores) --------- 12 (dias)

30 (professores) -------- x (dias)

Veja que, de cinco (professores) para 30 (professores), tivemos um aumento (+), mas, como agora estamos com uma equipe maior, o trabalho será realizado mais rapidamente. Logo, a quantidade de dias deverá diminuir (–). Dessa forma, as grandezas são inversamente proporcionais; resolveremos multiplicando na horizontal. Observe:

5 (professores) → 12 (dias)
30 (professores) → x (dias)

$$30 \cdot x = 5 \cdot 12$$
$$30x = 60$$
$$x = 2$$

A equipe de 30 professores levará apenas dois dias para corrigir as provas.

Dica

É muito comum encontrarmos questões envolvendo horas quando o assunto é regra de três. É importante nos lembrarmos que, para transformar horas em minutos, basta multiplicarmos os números por 60 min. Por exemplo, 1,2 horas = 1 hora + (0,2 · 60) minutos = 1 hora e 12 min.

Agora, façamos alguns exercícios comentados para fixar o conteúdo.

1. **(CEBRASPE-CESPE — 2018)** O motorista de uma empresa transportadora de produtos hospitalares deve viajar de São Paulo a Brasília para uma entrega de mercadorias. Sabendo que irá percorrer aproximadamente 1.100 km, ele estimou, para controlar as despesas com a viagem, o consumo de gasolina do seu veículo em 10 km/L. Para efeito de cálculos, considerou que esse consumo é constante.
Considerando essas informações, julgue o item que segue.
Nessa viagem, o veículo consumirá 110.000 dm3 de gasolina.

( ) CERTO ( ) ERRADO

Com 1 L, ele faz 10 km. Sabendo que 1 L é igual a 1dm³, então podemos dizer que, com 1dm³, ele faz 10km.Portanto,
10 km -------- 1dm³
1.100 km --------- x
10x = 1.000
x = 110 dm³ (a gasolina que será consumida). Resposta: Errado.

2. **(VUNESP — 2020)** Uma pessoa comprou determinada quantidade de guardanapos de papel. Se ela utilizar 2 guardanapos por dia, a quantidade comprada irá durar 15 dias a mais do que duraria se ela utilizasse 3 guardanapos por dia. O número de guardanapos comprados foi

a) 60.
b) 70.
c) 80.
d) 90.
e) 100.

x = dias
3 guardanapos por dia -------- x
2 guardanapos por dia -------- x + 15
São valores inversamente proporcionais — quanto mais guardanapos por dia, menos dias durarão. Assim, multiplicamos na horizontal:
3x = 2 · (x + 15)
3x = 2x + 30
3x – 2x = 30
x = 30
Podemos substituir em qualquer uma das duas situações:
3 guardanapos · 30 dias = 90
2 guardanapos · 45 [30 + 15] dias = 90. Resposta: Letra D.

3. **(FCC — 2022)** Em um determinado prédio, uma equipe de pintores pinta um apartamento em 4 dias e outra, em 6 dias. Supondo que as equipes consigam trabalhar em conjunto, mantendo o mesmo ritmo, o número de dias que elas precisam para pintar 10 apartamentos é

a) 24.
b) 22.
c) 25.
d) 23.
e) 26.

Se uma equipe pinta um apartamento em quatro dias, então essa equipe pinta $\frac{1}{4}$ *de apartamento em um dia. Analogamente, a outra equipe pinta um apartamento em seis dias, logo essa equipe pinta* $\frac{1}{6}$ *de apartamento em um dia. Ou seja, em um dia as duas equipes juntas pintam* $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$.
Agora, vamos fazer uma regra de três simples para descobrir quantos dias as duas equipes juntas levam para pintar 10 apartamentos.

$$\frac{5}{12} = 1 \text{ dia}$$
$$10 = x \text{ dias}$$
$$\frac{5x}{12} = 10 \cdot 1$$
$$5 \cdot x = 12 \cdot 10$$
$$5 \cdot x = 120$$
$$x = \frac{120}{5}$$
$$x = 24$$

Logo, as duas equipes juntas levam 24 dias para pintar os 10 apartamentos. Resposta: Letra A.

4. **(IESES — 2019)** Cinco pedreiros construíram uma casa em 28 dias. Se o número de pedreiros fosse aumentado para sete, em quantos dias essa mesma casa ficaria pronta?

a) 18 dias.
b) 16 dias.
c) 20 dias.
d) 22 dias.

5 (pedreiros) ---------- 28 (dias)
7 (pedreiros) ------------- x (dias)
Perceba que as grandezas são inversamente proporcionais, então basta multiplicar na horizontal.
5 · 28 = 7 · x
7x = 140
x = 140 ÷ 7
x = 20 dias

Resposta: Letra C.

REGRA DE TRÊS COMPOSTAS

A regra de três composta envolve mais de duas variáveis. As análises sobre se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais devem ser feitas cautelosamente levando em conta alguns princípios:

- as análises devem sempre partir da variável dependente em relação às outras variáveis;
- as análises devem ser feitas individualmente. Ou seja, deve-se comparar as grandezas duas a duas, mantendo as demais constantes;
- a variável dependente fica isolada em um dos lados da proporção.

Vamos analisar alguns exemplos e ver na prática como isso tudo funciona.

Exemplo 1: se seis impressoras iguais produzem mil panfletos em 40 minutos, em quanto tempo três dessas impressoras produziriam dois mil desses panfletos?

Da mesma forma que na regra de três simples, vamos montar a relação entre as grandezas e analisar cada uma delas isoladamente duas a duas.

6 (impressoras) ------ 1.000 (panfletos) ------- 40 (min.)
3 (impressoras) ------ 2.000 (panfletos) -------- x (min.)

Vamos escrever a proporcionalidade isolando a parte dependente de um lado e igualando às razões da seguinte forma — se for direta, vamos manter a razão; no entanto, se for inversa, vamos inverter a razão. Observe: $= \frac{40}{X} = \frac{?}{?} \cdot \frac{?}{?}$.

Analisando isoladamente duas a duas:

6 (impressoras) -------- 40 (min.)
3 (impressoras) -------- x (min.)

Perceba que, de seis impressoras para três impressoras, o valor diminuiu (–), ao passo que o tempo irá aumentar (+), pois, agora, teremos menos impressoras para realizar a tarefa. Logo, as grandezas são inversas, e devemos inverter a razão. $\frac{40}{X} = \frac{3}{6} \cdot \frac{?}{?}$

Analisando isoladamente duas a duas:

1.000 (panfletos) -------- 40 (min.)
2.000 (panfletos) -------- x (min.)

Perceba que, de mil panfletos para 1,2 mil panfletos, o valor aumenta (+); o tempo também irá aumentar (+). Logo, as grandezas são diretas e devemos manter a razão.

$$\frac{40}{x} = \frac{3}{6} \cdot \frac{1000}{2000}$$

Agora, basta resolver a proporção para acharmos o valor de x.

$$\frac{40}{X} = \frac{3\cancel{000}}{12\cancel{000}}$$

3x = 40 · 12
3x = 480
x = 160

As três impressoras produziriam dois mil panfletos em 160 minutos, que correspondem a 2 horas e 40 minutos.

Para fixarmos mais ainda nosso conhecimento, vamos analisar mais um exemplo.

Exemplo 2: um texto ocupa seis páginas de 45 linhas cada uma, com 80 letras (ou espaços) em cada linha. Para torná-lo mais legível, diminui-se para 30 o número de linhas por página e para 40 o número de letras (ou espaços) por linha. Considerando as novas condições, determine o número de páginas ocupadas.

Já aprendemos o passo a passo no exemplo anterior. Aqui, vamos resolver de maneira mais rápida.

6 (páginas) -------- 45 (linhas) -------- 80 (letras)
x (páginas) ------- 30 (linhas) -------- 40 (letras)

$$\frac{6}{X} = \frac{?}{?} \cdot \frac{?}{?}$$

Analisando isoladamente duas a duas:

6 (páginas) -------- 45 (linhas)
x (páginas) ------- 30 (linhas)

Perceba que, de 45 linhas para 30 linhas, o valor diminui (–), ao passo que o número de páginas irá aumentar (+). Logo, as grandezas são inversas e devemos inverter a razão.

$$\frac{6}{x} = \frac{30}{45} \cdot \frac{?}{?}$$

Analisando isoladamente duas a duas:

6 (páginas) -------- 80 (letras)
x (páginas) -------- 40 (letras)

Veja que, de 80 letras para 40 letras, o valor diminui (–), ao passo que o número de páginas irá aumentar (+). Logo, as grandezas são inversas e devemos inverter a razão.

$$\frac{6}{x} = \frac{30}{45} \cdot \frac{40}{80}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{2}{6}$$

2x = 36
x = 18

O número de páginas a serem ocupadas pelo texto respeitando as novas condições é igual a 18.

Agora, façamos alguns exercícios comentados para fixar o conteúdo.

1. **(CEBRASPE-CESPE — 2020)** Determinado equipamento é capaz de digitalizar 1.800 páginas em 4 dias, funcionando 5 horas diárias para esse fim. Nessa situação, a quantidade de páginas que esse mesmo equipamento é capaz de digitalizar em 3 dias, operando 4 horas e 30 minutos diários para esse fim, é igual a

a) 2.666.
b) 2.160.
c) 1.215.
d) 1.500.
e) 1.161.

Primeiro, vamos passar para minutos:
5h = 300min
4h30min = 270min
minutos---dias----páginas
300 ----------4---------1.800
270 ----------3------------x
Resolvendo, temos:

$$\frac{1.800}{x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{300 \text{ (simplificada por 30)}}{270 \text{ (simplificada por 30)}}$$

$$\frac{1.800}{x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9}$$

4 · x · 10 = 1.800 · 3 · 9
40 · x = 48.600
x = 1.215 páginas que esse mesmo equipamento é capaz de digitalizar. Resposta: Letra C.

2. **(VUNESP — 2016)** Em uma fábrica, 5 máquinas, todas operando com a mesma capacidade de produção, fabricam um lote de peças em 8 dias, trabalhando 6 horas por dia. O número de dias necessários para que 4 dessas máquinas, trabalhando 8 horas por dia, fabriquem dois lotes dessas peças é

a) 11.
b) 12.
c) 13.
d) 14.
e) 15.

5 máquinas ------1 lote ---------- 8 dias ------------ 6 horas
4 máquinas ------2 lotes ----------x dias -------------8 horas

Quanto mais dias para a entrega do lote, menos horas trabalhadas por dia (inversa), menos máquinas para fazer o serviço (inversa) e mais lotes para serem entregues (direta). Resolvendo:

$$\frac{8}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{}{6} \cdot \frac{4}{5} \quad \text{(simplifique } \frac{8}{6} \text{ por 2)}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{16}{30} \quad \text{(simplifique } \frac{16}{30} \text{ por 2)}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{8}{15}$$

8·x = 120
x = 120 ÷ 8
x = 15 dias
Resposta: Letra E.

3. **(CEBRASPE-CESPE — 2018)** No item a seguir é apresentada uma situação hipotética, seguida de uma assertiva a ser julgada, a respeito de proporcionalidade, divisão proporcional, média e porcentagem.
Todos os caixas de uma agência bancária trabalham com a mesma eficiência: 3 desses caixas atendem 12 clientes em 10 minutos. Nessa situação, 5 desses caixas atenderão 20 clientes em menos de 10 minutos.

( ) CERTO ( ) ERRADO

3 caixas---12 clientes---10 minutos
5 caixas---20 clientes---x minutos

$$\frac{10}{x} = \frac{5}{3} \cdot \frac{12}{20}$$

5 · 12 · x = 10 · 3 · 20
60 · x = 600
x = 10
Os cinco caixas atenderão em exatamente 10 minutos — não em menos de 10, como a questão afirma. Resposta: Errado.

4. **(VUNESP — 2020)** Das 9 horas às 15 horas, de trabalho ininterrupto, 5 máquinas, todas idênticas e trabalhando com a mesma produtividade, fabricam 600 unidades de determinado produto. Para a fabricação de 400 unidades do mesmo produto por 3 dessas máquinas, trabalhando nas mesmas condições, o tempo estimado para a realização do serviço é de

a) 5 horas e 54 minutos
b) 6 horas e 06 minutos.
c) 6 horas e 20 minutos.
d) 6 horas e 40 minutos.
e) 7 horas e 06 minutos.

Das 9h às 15h = 6 horas = 360min
360min --- 5 máquinas -- 600 unidades (são cortados os zeros iguais)
x ------------ 3 máquinas -- 400 unidades (são cortados os zeros iguais)

$$\frac{360}{x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{4}$$

x · 3 · 6 = 360 · 5 · 4
x · 18 = 7.200

$$x = \frac{7200}{18}$$

x = 400
Logo, transformando minutos para horas novamente, temos:
x = 400min
x = 6h40min
Resposta: Letra D

5. **(VUNESP — 2020)** Em uma fábrica de refrigerantes, 3 máquinas iguais, trabalhando com capacidade máxima, ligadas ao mesmo tempo, engarrafam 5 mil unidades de refrigerante, em 4 horas. Se apenas 2 dessas máquinas trabalharem, nas mesmas condições, no engarrafamento de 6 mil unidades do refrigerante, o tempo esperado para a realização desse trabalho será de

a) 6 horas e 40 minutos.
b) 6 horas e 58 minutos.
c) 7 horas e 12 minutos.
d) 7 horas e 20 minutos.
e) 7 horas e 35 minutos.

3 máquinas---5 mil garrafas---4 horas
2 máquinas---6 mil garrafas---x
Veja que, se aumentar o tempo de trabalho, quer dizer que serão engarrafados mais refrigerantes (direta); se aumentar o tempo de trabalho, quer dizer que são menos máquinas trabalhando (inversa).

$$\frac{4}{x} = \frac{5000}{6000} \cdot \frac{2}{3}$$
$$\frac{4}{x} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$$

$x \cdot 5 \cdot 2 = 4 \cdot 6 \cdot 3$
$10 \cdot x = 72$
x = 7,2 horas (7 horas + 0,2 horas = 7 horas + (0,2 · 60min) = 7 horas e 12 minutos)

Resposta: Letra C.

PORCENTAGENS

A porcentagem é uma medida de razão com base 100. Ou seja, corresponde a uma fração cujo denominador é 100. Vamos observar alguns exemplos e notar como podemos representar um número porcentual.

- $30\% = \frac{30}{100}$ (forma de fração)
- $30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3$ (forma decimal)
- $30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ (forma de fração simplificada)

Sendo assim, a razão 30% pode ser escrita de várias maneiras:

$$30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3 = \frac{3}{10}$$

Também é possível fazer a conversão inversa, isto é, transformar um número qualquer em porcentual. Para isso, basta multiplicar por 100. Veja:

- 25 · 100 = 2.500%;
- 0,35 · 100 = 35%;
- 0,586 · 100 = 58,6%.

Número Relativo

A porcentagem traz uma relação entre uma parte e um todo. Quando dizemos 10% de 1.000, os 1.000 correspondem ao todo. Já os 10% correspondem à fração do todo que estamos especificando. Para descobrir a quanto isso corresponde, basta multiplicar 10% por 1.000.

$$10\% \text{ de } 1.000 = \frac{10}{100} \cdot 1.000 = 100$$

Dessa maneira, 1.000 é o todo, enquanto 100 é a parte que corresponde a 10% de 1.000.

Dica

Quando o todo variar, a porcentagem também irá variar.

Veja um exemplo: Roberto assistiu a duas aulas de matemática financeira. Sabendo que o curso que ele comprou conta com um total de oito aulas, qual é o percentual de aulas já assistidas por Roberto?

O todo de aulas é oito. Para descobrir o percentual, devemos dividir a parte pelo todo e obter uma fração.

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Precisamos transformar em porcentagem, ou seja, vamos multiplicar a fração por $100 : \frac{1}{4} \cdot 100 = 25\%$

Soma e Subtração de Porcentagem

As operações de soma e subtração de porcentagem são as mais comuns. É o que acontece quando se diz que um número excede, reduziu, é inferior ou é superior ao outro em "tantos por cento". A grandeza inicial corresponderá sempre a 100%. Então, basta somar ou subtrair o percentual fornecido dos 100% e multiplicar pelo valor da grandeza.

Vejamos um exemplo: Paulinho comprou um curso de 200 horas-aula. Porém, com a publicação do edital, a escola precisou aumentar a carga horária em 15%. Qual o total de horas-aula do curso ao final?

Inicialmente, o curso de Paulinho tinha um total de 200 horas-aula que correspondiam a 100%. Com o aumento porcentual, o novo curso passou a ter 100% + 15% das aulas inicialmente previstas. Portanto, o total de horas-aula do curso será: $(1 + 0,15) \cdot 200 = 1,15 \cdot 200 = 230$ horas-aula.

Atenção! A avaliação do crescimento ou da redução percentual deve ser feita sempre em relação ao valor inicial da grandeza.

$$\textbf{Variação percentual} = \frac{\text{Final} - \text{Inicial}}{\text{Inicial}}$$

Veja mais um exemplo para podermos fixar melhor: Juliano percebeu que ele ainda não assistiu a 200 aulas do seu curso. Ele deseja reduzir o número de aulas não assistidas a 180. É correto afirmar que, se Juliano chegar às 180 aulas almejadas, o número terá caído 20%?

A variação percentual de uma grandeza corresponde ao índice:

$$\text{Variação percentual} = \frac{\text{Final} - \text{Inicial}}{\text{Inicial}} = \frac{180 - 200}{200} = -\frac{20}{200} = -0,10$$

Como o resultado foi negativo, podemos afirmar que houve uma redução percentual de 10% nas aulas ainda não assistidas por Juliano. O enunciado está errado ao afirmar que essa redução foi de 20%.

Agora, vamos fazer alguns exercícios comentados para aumentarmos nossos conhecimentos.

1. **(CEBRASPE-CESPE — 2020)** Em determinada loja, uma bicicleta é vendida por R$ 1.720 à vista ou em duas vezes, com uma entrada de R$ 920 e uma parcela de R$ 920 com vencimento para o mês seguinte. Caso queira antecipar o crédito correspondente ao valor da parcela, a lojista paga para a financeira uma taxa de antecipação correspondente a 5% do valor da parcela.
Com base nessas informações, julgue o item a seguir.
Na compra a prazo, o custo efetivo da operação de financiamento pago pelo cliente será inferior a 14% ao mês.

( ) CERTO ( ) ERRADO

Valor da bicicleta =R$ 1.720
Parcelado = R$ 920 (entrada) + R$ 920 (parcela)
Na compra a prazo, o agente vai pagar R$ 920 (entrada); logo, sobrarão (1.720 – 920 = 800).
No próximo mês, é preciso pagar R$ 920, ou seja, 800 + 120 de juros. Agora, peguemos 120 (juros) e dividamos por 800: 120,00 ÷ 800,00 = 0,15% ao mês.
A questão afirma que seria inferior a 0,14%, ou seja, está errada. Resposta: Errado.

2. **(CEBRASPE-CESPE — 2019)** Na assembleia legislativa de um estado da Federação, há 50 parlamentares, entre homens e mulheres. Em determinada sessão plenária estavam presentes somente 20% das deputadas e 10% dos deputados, perfazendo-se um total de 7 parlamentares presentes à sessão.
Infere-se da situação apresentada que, nessa assembleia legislativa, havia

a) 10 deputadas.
b) 14 deputadas.
c) 15 deputadas.
d) 20 deputadas.
e) 25 deputadas.

50 parlamentares
Deputadas = x
Deputados = 50 – x
Compareceram 20% x e 10% (50 – x), totalizando sete parlamentares. Não sabemos a quantidade exata de cada sexo. Vamos montar uma equação e achar o valor de x.
20% x + 10% (50 – x) = 7
20 ÷ 100 · x + 10 ÷ 100 · (50 – x) = 7
2 ÷ 10 · x + 1 ÷ 10 · (50 – x) = 7
2x ÷ 10 + 50 – x ÷ 10 = 7 (é feito o MMC)

2x + 50 – x = 70
2x – x = 70 – 50
x = 20 deputadas fazem parte da assembleia legislativa. Resposta: Letra D.

3. **(FUNCAB — 2015)** Adriana e Leonardo investiram R$ 20.000,00, sendo o 3/5 desse valor em uma aplicação que gerou lucro mensal de 4% ao mês durante dez meses. O restante foi investido em uma aplicação, que gerou um prejuízo mensal de 5% ao mês, durante o mesmo período. Ambas as aplicações foram feitas no sistema de juros simples.
Pode-se concluir que, no final desses dez meses, eles tiveram:

a) prejuízo de R$800,00.
b) lucro de R$3.200,00.
c) lucro de R$800,00.
d) prejuízo de R$6.000,00
e) lucro de R$5.000,00.

3 ÷ 5 de 20.000 = 12.000
12.000 · 4% = 12.000 · 0,04 = 480
480 · 10 (meses) = 4.800 (lucro)
O que sobrou: 20.000 – 12.000 = 8.000. Aplicação que foi investida e gerou prejuízo de 5% ao mês, durante 10 meses:
8.000 · 5% = 8.000 · 0,05 = 400
400 · 10 meses = 4.000 (prejuízo)
Logo, a aplicação que gerou lucro menos a aplicação que gerou prejuízo:
4.800 – 4.000 = 800 (lucro)
Resposta: Letra C.

PROPOSIÇÃO LÓGICA

PROPOSIÇÕES SIMPLES

Vamos começar nosso estudo falando sobre o que é uma proposição lógica. Observe a frase a seguir:

Ex.: Paula vai à praia.

Para saber se temos ou não uma proposição, precisamos de três requisitos fundamentais:

- **Ser uma oração**: ou seja, são frases com verbos;
- **Oração declarativa:** a frase precisa estar apresentando uma situação, um fato;
- **Pode ser classificada como verdadeira ou falsa**: ou seja, podemos atribuir o valor lógico verdadeiro ou o valor lógico falso para a declaração.

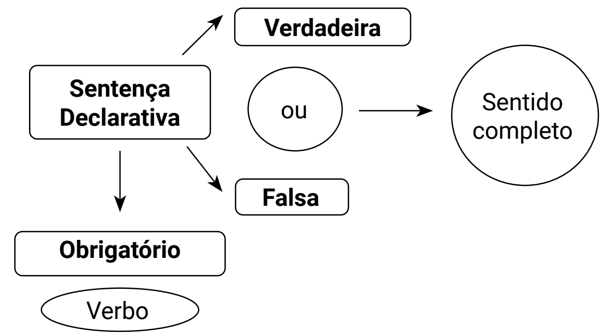
Tendo isso em vista, podemos afirmar claramente que a frase "Paula vai à praia" é uma proposição lógica, pois temos a presença de um verbo (ir), uma informação completa (temos o sujeito claro na oração) e podemos afirmar se é verdadeira ou falsa.

Importante!

Proposição Lógica é uma **oração declarativa que admite apenas um valor lógico**: V ou F.

Ou então podemos também esquematizar o que é uma proposição lógica assim:

Chama-se proposição toda sentença declarativa que pode ser valorada ou só como verdadeira ou só como falsa. A presença do **verbo** é obrigatória juntamente com o **sentido completo** (caráter informativo).



Toda proposição pode ser representada simbolicamente pelas letras do alfabeto. Veja no exemplo:

- **p:** Sabino é um pintor esperto;
- **r:** Kate é uma mulher alta.

Na situação temos duas proposições sendo representadas pelas letras p e r.

Agora que já sabemos o que são proposições lógicas, fica tranquilo distinguir o que **não são proposições**. Isto é fundamental, pois várias questões de prova perguntam exatamente isso — são apresentadas algumas frases e você precisa identificar qual delas não é uma proposição. Vejamos os casos em que mais aparecem:

- **Perguntas:** são as orações interrogativas.
  Exemplo: Que horas vamos ao cinema?
  Essa pergunta não pode ser classificada como verdadeira ou falsa;
- **Exclamações:** são frases exclamativas.
  Exemplo: Que lindo cabelo!
  Essa exclamação não pode ser valorada, pois apresentam percepções subjetivas;
- **Ordens:** são orações com verbo no imperativo.
  Exemplo: Pegue o livro e vá estudar.

Uma ordem não pode ser classificada como verdadeira ou falsa. Muito cuidado com esse tipo de oração, pois pode ser facilmente confundida com uma proposição lógica.

Não são proposições: **perguntas, exclamações e ordens.**

Temos um outro caso menos cobrado em provas, mas que também não é proposição lógica: o **paradoxo**. Para ficar mais claro, veja o exemplo a seguir:

Ex.: Esta frase é uma mentira.

Quando atribuímos um valor de verdade para a frase, então, na verdade, ele mentiu, uma vez que a própria frase já diz isso, e se atribuirmos o valor falso, então a frase é verdade, pois ela diz ser uma mentira e já sabemos que isso é falso.

Perceba que sempre que valoramos a frase ela nos resulta um valor contrário, ou seja, estamos diante de uma frase que é contraditória em si mesma. Isso é a definição de um paradoxo.