Marinha do Brasil

MARINHA

Aprendiz de Marinheiro

NV-010DZ-24-MARINHA-APRENDIZ-MAR

NOVA CONCURSOS

SUMÁRIO

MATEMÁTICA

ARITMÉTICA

NÚMEROS NATURAIS: NÚMEROS PRIMOS, FATORAÇÃO, NÚMERO DE DIVISORES, MÁXIMO DIVISOR COMUM E MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Números Primos

Um número natural é definido como número primo se tiver exatamente dois divisores: o número 1 e ele mesmo. Contudo, temos que, por definição, os números 0 e 1 não são números primos. Lembre-se de que o 2 é o único número par que também é primo!

Importante!

Não há consenso sobre haver ou não números primos negativos. Contudo, para seu conhecimento, o conceito de primalidade para números inteiros é diferente. O número p precisa ser divisível por 1, –1, p e –p, isto é, precisa ser dividido por 1, –1, por ele mesmo e pelo seu inverso.

Para identificar um número primo, é necessário analisar seus divisores. Para isto, vamos estudar um pouco mais a fundo múltiplos e divisores de um número.

Múltiplos e Divisores

Sejam dois números naturais x e y, temos que x é múltiplo de y quando existe um número natural z tal que $x = y \cdot z$.

Dessa maneira, temos que 30 é múltiplo de 3, uma vez que $3 \cdot z = 30$, em que z = 10. De mesma forma, 30 é múltiplo de 10, uma vez que $10 \cdot z = 30$, em que z = 3.

Vamos calcular alguns dos múltiplos de 2 multiplicando o 2 por todos os números naturais de 0 a 10.

$$2 \cdot 0 = 0$$
$$2 \cdot 1 = 2$$
$$2 \cdot 2 = 4$$
$$2 \cdot 3 = 6$$
$$2 \cdot 4 = 8$$
$$2 \cdot 5 = 10$$
$$2 \cdot 6 = 12$$
$$2 \cdot 7 = 14$$
$$2 \cdot 8 = 16$$
$$2 \cdot 9 = 18$$
$$2 \cdot 10 = 20$$

Assim, temos que o conjunto M dos múltiplos de 2 é M = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20...}.

Lembre-se de que o conjunto dos múltiplos é **infinito**!

Sejam dois números naturais **x** e **y**, temos que **x** é divisor de **y** quando existe um número natural z tal que $z = \frac{y}{x}$, de maneira que não haja resto na divisão.

Dessa maneira, temos que 5 é divisor de 300, uma vez que $300 \div 5 = z$, tal que z = 60.

Para encontrarmos os divisores de um número, verificamos se o resultado da divisão é inteiro. Vejamos os divisores de 30:

$$30 \div 30 = 1$$
$$30 \div 15 = 2$$
$$30 \div 10 = 3$$
$$30 \div 6 = 5$$
$$30 \div 5 = 6$$
$$30 \div 3 = 10$$
$$30 \div 2 = 15$$
$$30 \div 1 = 30$$

Temos, então, que o conjunto D dos divisores de 30 é dado por D = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30}.

Perceba que, ao contrário do conjunto dos múltiplos, o conjunto dos divisores é finito.

Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Os múltiplos de um número X são aqueles números que podem ser obtidos multiplicando X por outro número natural. Assim, o MMC de dois ou mais números é o menor número positivo que é múltiplo comum de todos os números dados. Agora, observe os múltiplos dos números 4 e 6:

M (4) = 4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, **36**, ...
M (6) = 6, **12**, 18, **24**, 30, **36**, 42, ...

Quais são os múltiplos iguais (comuns) entre os números? São eles: 12, 24, 36... E qual o menor deles? É o número 12. Sendo assim, o número 12 é o menor múltiplo comum entre 4 e 6, ou seja, o MMC entre 4 e 6 é igual a 12.

- **Cálculo do MMC por Fatoração Simultânea**

Podemos calcular o MMC entre 2 ou mais números, de maneira mais rápida, fazendo a fatoração simultânea dos dois números. Veja:

Ex.: calcule o MMC entre 6 e 8.

6 – 8	2 (aqui devemos colocar o menor número primo)
3 – 4	2 (nesse caso repetimos o número 3, pois ele não é dividido pelo 2)
3 – 2	3
3 – 1	3
1 – 1	

$MMC = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$

Logo, o MMC (6 e 8) = 24.

Com esse método, é possível calcular o MMC entre vários números. Vamos exercitar novamente, dessa vez com mais números.

Ex.: calcule o MMC entre os números 10, 12, 20

10 – 12 – 20	2
5 – 6 – 10	2
5 – 3 – 5	3
5 – 1 – 5	5
1 – 1 – 1	

MMC = 2 · 2 · 3 · 5 = 60.
Logo, o MMC (10, 12 e 20) = 60.

- **Passos para Calcular o MMC (Fatoração Simultânea)**

Primeiramente, deve-se montar uma coluna para os fatores primos e outra coluna para cada um dos números. Em seguida, inicia-se a divisão dos números pelo menor fator primo (2), aumentando o fator apenas quando nenhum dos números puder mais ser dividido por ele.

Se algum dos números não puder ser dividido, basta copiá-lo para a próxima linha. O objetivo é fazer com que todos os números cheguem ao valor 1. O MMC será a multiplicação dos fatores primos utilizados.

Pensando além e analisando os tipos de questões que aparecem nas provas, é importante lembrar que os enunciados relacionados ao MMC geralmente envolvem uma ideia de periodicidade, repetição ou ciclo de acontecimentos. Veja um exemplo.

Em uma linha de montagem de fábrica, duas luzes de sinalização piscam em intervalos diferentes: uma a cada 20 minutos e a outra a cada 35 minutos. Se ambas piscarem juntas às 8 horas da manhã, em que horário isso voltará a acontecer?

Observe as expressões “a cada 20 minutos” e “a cada 35 minutos”. Percebe-se, aqui, uma ideia de repetição. Por exemplo, se a luz que pisca a cada 20 minutos acender às 15h, ela irá piscar novamente após 20 minutos, ou seja, às 15h20, depois às 15h40, 16h, e assim por diante. Portanto, esse é um tipo clássico de questão envolvendo MMC.

Para resolvermos a questão anterior, devemos encontrar o MMC entre 20 e 30:

20, 35	2
10, 35	2
5, 35	5
1, 7	7
1, 1	

Portanto, MMC (20, 35) = 2 · 2 · 5 · 7 = 140.
Convertendo 140 para horas, temos:

140 min = 2 horas e 20 minutos, portanto:
8h + 2h20min = 10h20min

Assim, as luzes piscarão novamente às 10 horas e 20 minutos.

> **Dica**
>
> Atente aos termos “a cada”, “em” e “ou” nos enunciados, pois estes podem indicar uma ideia de repetição, ciclo e periodicidade.

Revise seus conhecimentos por meio dos exercícios comentados a seguir.

1. (FCC — 2015) Para um evento promovido por uma determinada empresa, uma equipe de funcionários preparou uma apresentação de slides que deveria transcorrer durante um momento de confraternização. Tal apresentação é composta por 63 slides e cada um será projetado num telão por exatos 10 segundos. Foi ainda escolhida uma música de fundo, com duração de 4min40s para acompanhar a apresentação dos slides. Eles planejam que a música e a apresentação dos slides comecem simultaneamente e “rodem” ciclicamente, sem intervalos, até que ambas finalizem juntas. A fim de estudar a viabilidade desse plano, eles calcularam que a quantidade de vezes que a música teria de tocar até que seu final coincidisse, pela primeira vez depois do início, com final da apresentação seria

a) 5.
b) 42.
c) 12.
d) 35.
e) 9.

Slide = 630 segundos (63 · 10s);
Música = 280 segundos (4 · (60s + 40s)).
MMC:

630, 280	*2*
315, 140	*2*
315, 70	*2*
315, 35	*5*
63, 7	*7*
9, 1	*3*
3, 1	*3*
1, 1	

2 · 2 · 2 · 5 · 7 · 3 · 3 = 2.520
Logo, após 2.520 segundos, a música e o slide terminarão ao mesmo tempo.
Slide: 2520/630 = 4 voltas
Música: 2520/280 = 9 voltas.
Resposta: Letra E.

2. (VUNESP — 2017) Um comerciante possui uma caixa com várias canetas e irá colocá-las em pacotinhos, cada um deles com o mesmo número de canetas. É possível colocar, em cada pacotinho, ou 6 canetas, ou 8 canetas ou 9 canetas e, em qualquer dessas opções, não restará caneta alguma na caixa. Desse modo, o menor número de canetas que pode haver nessa caixa é

a) 70.
b) 66.
c) 64.
d) 72.
e) 68.

MMC (6,8,9):

6, 8, 9	*2*
3, 4, 9	*2*
3, 2, 9	*2*
3, 1, 9	*3*
1, 1, 3	*3*
1, 1, 1	

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$ canetas.
Resposta: Letra D.

3. **(IBFC — 2018)** Um comerciante vende balas em pacotinhos, sempre com a mesma quantidade. Ao fazer isso, percebeu que dentre as balas que possuía poderia colocar 8, 12 ou 20 balas em cada pacote. Nessas condições, assinale a alternativa que apresenta o número mínimo de balas que o comerciante dispunha:

a) 120.
b) 240.
c) 360.
d) 60.

MMC (8, 12, 20):

8, 12, 20	*2*
4, 6, 10	*2*
2, 3, 5	*2*
1, 3, 5	*3*
1, 1, 5	*5*
1, 1, 1	

MMC = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ balas.
Resposta: Letra A.

~~Máximo Divisor Comum (MDC)~~

O máximo divisor comum (MDC) corresponde ao maior número divisível entre dois ou mais números inteiros. Ou seja, o MDC de dois ou mais números é o maior número que é divisor comum de todos os números dados.

Os divisores comuns de 12 e 18 são 1, 2, 3 e 6. Dentre esses, o número maior é o 6. Sendo assim, o número 6 é o máximo divisor comum entre 12 e 18, ou seja, o MDC entre 12 e 18 é igual a 6.

- **Cálculo do MDC por Fatoração Simultânea**

Podemos calcular o MDC entre dois ou mais números utilizando a fatoração simultânea. É importante destacar que essa fatoração deve ser realizada até o momento em que o número 1 divida todos os números envolvidos ao mesmo tempo. Veja:

Ex.: calcule o MDC entre 60 e 45.

60 – 45	3 (note que 3 é o número que divide 60 e 45 ao mesmo tempo)
20 – 15	5 (note que 5 é o número que divide 20 e 15 ao mesmo tempo)
4 – 3	1 (aqui, encerramos a fatoração, pois o número 1 divide todos os outros ao mesmo tempo)

MDC = $3 \cdot 5 \cdot 1 = 15$.
Logo, o MDC (60 e 45) = 15.

- **Passos para Calcular o MDC (Fatoração Simultânea)**

Inicialmente, é necessário montar uma coluna para os fatores primos e outra para cada um dos números. Em seguida, deve-se começar a dividir os números pelo fator primo que divide todos ao mesmo tempo. A fatoração deve ser interrompida quando o número 1 dividir todos os números simultaneamente. Por fim, o MDC será dado pela multiplicação dos fatores primos utilizados.

Dica

Embora sejam bastante semelhantes, o cálculo do MMC e do MDC tem diferenças importantes. Para não os confundir, lembre-se de que, ao calcular o MMC, fatoramos todos os números, mesmo que separadamente, até chegarmos ao “1”. Já no cálculo do MDC, a fatoração é feita simultaneamente para todos os números, sem a necessidade de alcançar o “1”.

Atente para o exercício comentado a seguir.

1. **(NOVA CONCURSOS)** Uma escola vai distribuir kits de material escolar para alunos de duas turmas. Na primeira turma, há 36 alunos, e na segunda turma, há 48 alunos. A escola quer dividir os kits em grupos com a mesma quantidade de alunos, de forma que cada grupo tenha o máximo número possível de alunos. Quantos grupos serão formados em cada turma?

a) 2 e 3.
b) 3 e 4.
c) 4 e 5.
d) 5 e 6.

Primeiramente, vamos descobrir qual o MDC entre 36 e 48:

36, 48	*2*
18, 24	*2*
9, 12	*3*
3 , 4	

Assim, MDC (36, 48) = $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
Portanto, cada grupo será formado por 12 alunos.
Agora, vamos determinar quantos grupos haverá em cada sala:

$$\frac{36}{12} = 3$$

$$\frac{48}{12} = 4$$

Assim, cada grupo terá 12 alunos; em uma sala haverá 3 grupos, e na outra, 4 alunos.
Resposta: Letra B.

A razão entre duas grandezas é igual à divisão entre elas. Veja: $\frac{2}{5}$ (ou podemos representar por 2 ÷ 5) (lê-se "2 está para 5").

Já a proporção é a igualdade entre razões. Veja: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ (ou podemos representar por 2 ÷ 3 = 4 ÷ 6) (lê-se "2 está para 3 assim como 4 está para 6").

Os problemas mais comuns que envolvem razão e proporção aparecem quando se aplica uma "variável" qualquer dentro da proporcionalidade buscando saber seu valor. Veja o exemplo: $\frac{2}{3} = \frac{x}{6}$ ou 2 ÷ 3 = x ÷ 6.

Para resolvermos esse tipo de problema, devemos usar a propriedade fundamental da razão e proporção: "produto dos meios pelos extremos".

- **Meio**: 3 e x;
- **Extremos**: 2 e 6.

Logo, devemos fazer a multiplicação entre eles numa igualdade. Observe:

$$3 \cdot x = 2 \cdot 6$$
$$3x = 12$$
$$x = 12 \div 3$$
$$x = 4$$

Lembre-se de que a maioria dos problemas envolvendo esse tema é resolvida utilizando essa propriedade fundamental. Porém, algumas questões acabam sendo um pouco mais complexas. Sendo assim, pode ser útil conhecer algumas propriedades para facilitar. Vamos a elas.

Propriedade das Proporções

- **Somas Externas**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Vamos entender um pouco melhor resolvendo um questão-exemplo: suponha que uma fábrica vai distribuir um prêmio de R$ 10 mil para seus dois empregados (Carlos e Diego). Esse prêmio vai ser dividido de forma proporcional ao seu tempo de serviço na fábrica. Carlos está há três anos na fábrica e Diego está há dois anos na fábrica. Quanto cada um vai receber?

Primeiro, devemos montar a proporção. Sendo C a quantia que Carlos vai receber e D a quantia que Diego vai receber, temos:

$$\frac{c}{3} = \frac{d}{2}$$

Utilizando a propriedade das somas externas:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{C+D}{3+2}$$

Perceba que C + D = 10.000 (as partes somadas), então podemos substituir na proporção:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{C+D}{3+2} = \frac{10.000}{5} = 2.000$$

Aqui, cabe uma observação importante. Esse valor, 2.000, que chamamos de "constante de proporcionalidade", é que nos mostra o valor real das partes dentro da proporção. Veja:

$$\frac{C}{3} = 2.000$$
$$C = 2.000 \cdot 3$$
C = 6.000 (esse é o valor de Carlos)

$$\frac{D}{2} = 2.000$$
$$D = 2.000 \cdot 2$$
D = 4.000 (esse é o valor de Diego)

Assim, Carlos vai receber R$ 6 mil e Diego vai receber R$ 4 mil.

- **Somas Internas**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

É possível, ainda, trocar o numerador pelo denominador ao efetuar essa soma interna, desde que o mesmo procedimento seja feito do outro lado da proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

Vejamos um exemplo:

$$\frac{x}{14-x} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{x+14-x}{x} = \frac{2+5}{2}$$
$$\frac{14}{x} = \frac{7}{2}$$
$$7 \cdot x = 2 \cdot 14$$
$$X = \frac{14 \cdot 2}{7} = 4$$

Portanto, encontramos que x = 4.

Observação: vale lembrar que essa propriedade também serve para subtrações internas.

- **Soma com Produto por Escalar**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+2b}{b} = \frac{c+2d}{d}$$

Vejamos um exemplo para melhor entendimento: uma empresa vai dividir o prêmio de R$ 13 mil proporcionalmente ao número de anos trabalhados. São dois funcionários que trabalham há dois anos na empresa e três funcionários que trabalham há três anos.

Sendo A o prêmio dos funcionários com dois anos e B, o prêmio dos funcionários com três anos de empresa, temos:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3}$$

Porém, como são dois funcionários na categoria A e três funcionários na categoria B, podemos escrever que a soma total dos prêmios é igual a R$ 13 mil.

$$2A + 3B = 13.000$$

Agora, multiplicando em cima e embaixo de um lado por 2 e do outro lado por 3, temos:

$$\frac{2A}{4} = \frac{3B}{9}$$

Aplicando a propriedade das somas externas, podemos escrever o seguinte:

$$\frac{2A}{4} = \frac{3B}{9} = \frac{2A+3B}{4+9}$$

Substituindo o valor da equação 2A + 3B na proporção, temos:

$$\frac{2A}{4} = \frac{3B}{9} = \frac{2A+3B}{4+9} = \frac{13.000}{13} = 1.000$$

Logo,

$$\frac{2A}{4} = 1.000$$

$$2A = 4 \cdot 1.000$$
$$2A = 4.000$$
$$A = 2.000$$

Fazendo a mesma resolução em B:

$$\frac{3B}{9} = 1.000$$
$$3B = 9 \cdot 1.000$$
$$3B = 9.000$$
$$B = 3.000$$

Sendo assim, os funcionários com dois anos de casa receberão R$ 2 mil de bônus. Já os funcionários com três anos de casa receberão R$ 3 mil de bônus.

O total pago pela empresa será: $2 \cdot 2.000 + 3 \cdot 3.000 = 4.000 + 9.000 = 13.000$.

Agora, vamos estudar um tipo de problema envolvendo razão e proporção que aparece frequentemente em provas de concursos.

GRANDEZAS DIRETA E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Diretamente Proporcional

Um dos tópicos mais comuns em questões de prova é "dividir uma determinada quantia em partes proporcionais a determinados números". Vejamos um exemplo para entendermos melhor como esse assunto é cobrado.

A quantia de R$ 900 mil deve ser dividida em partes proporcionais aos números 4, 5 e 6. A menor dessas partes corresponde a...

Primeiro, vamos chamar de X, Y e Z as partes proporcionais, respectivamente 4, 5 e 6. Sendo assim, X é proporcional a 4, Y é proporcional a 5 e Z é proporcional a 6, ou seja, podemos representar na forma de razão. Veja: $\frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{Z}{6}$ = constante de proporcionalidade.

Usando uma das propriedades da proporção, somas externas, temos:

$$\frac{X+Y+Z}{4+5+6} = \frac{900.000}{15} = 60.000$$

A menor dessas partes é aquela que é proporcional a 4, logo:

$$\frac{X}{4} = 60.000$$

$$X = 60.000 \cdot 4$$
$$X = 240.000$$

Inversamente Proporcional

É um tipo de questão menos recorrente, mas não menos importante. Consiste em distribuir uma quantia X a três pessoas, de modo que cada uma receba uma quantidade inversamente proporcional a três números. Vejamos um exemplo: suponha que queiramos dividir 740 mil em partes inversamente proporcionais a 4, 5 e 6.

Vamos chamar de X as quantias que devem ser distribuídas inversamente proporcionais a 4, 5 e 6, respectivamente. Devemos somar as razões e igualar ao total que dever ser distribuído para facilitar o nosso cálculo. Veja:

$$\frac{X}{4} + \frac{X}{5} + \frac{X}{6} = 740.000$$

Agora, vamos precisar tirar o MMC (mínimo múltiplo comum) entre os denominadores para resolvermos a fração.

4 – 5 – 6 | 2

2 – 5 – 3 | 2

1 – 5 – 3 | 3

1 – 5 – 1 | 5

1 – 1 – 1 | $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Assim, dividindo o MMC pelo denominador e multiplicando o resultado pelo numerador, temos:

$$\frac{15X}{60} + \frac{12X}{60} + \frac{10X}{60} = 740.000$$

$$\frac{37X}{60} = 740.000$$

$$X = 1.200.000$$

Agora, basta substituir o valor de X nas razões para achar cada parte da divisão inversa.

$$\frac{X}{4} = \frac{1.200.000}{4} = 300.000$$

$$\frac{X}{5} = \frac{1.200.000}{5} = 240.000$$

$$\frac{X}{6} = \frac{1.200.000}{6} = 200.000$$

Logo, as partes divididas inversamente proporcionais aos números 4, 5 e 6 são, respectivamente, 300.000, 240.000 e 200.000