Prefeitura Municipal de Brasília de Minas, Minas Gerais

BRASÍLIA DE MINAS-MG

Para todos os cargos de Nível Médio

NV-005JL-24-PREF-BRASILIA-MG-CAR-NIV-MED

NOVA CONCURSOS

SUMÁRIO

MATEMÁTICA

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

NÚMERO PRIMO

Um **número natural** é definido como primo se tiver exatamente dois divisores: o número 1 e ele mesmo. Contudo, temos que, por definição, os números 0 e 1 não são números primos. Lembre-se de que o 2 é o único número par que também é primo!

> **Importante!**
> Não há consenso sobre haver ou não números primos negativos. Contudo, para seu conhecimento, o conceito de primalidade para números inteiros é diferente. O número p precisa ser divisível por 1, –1, p e –p, isto é, precisa ser dividido por 1, –1, por ele mesmo e pelo seu inverso.

Para identificar um número primo, é necessário analisar seus divisores. Para isso, vamos estudar um pouco mais a fundo múltiplos e divisores de um número.

Múltiplos e Divisores

Sejam dois números naturais x e y, temos que x é múltiplo de y quando existe um número natural z tal que $x = y \cdot z$.

Dessa maneira, temos que 30 é múltiplo de 3, uma vez que $3 \cdot z = 30$, onde $z = 10$. De mesma forma, 30 é múltiplo de 10, uma vez que $10 \cdot z = 30$, onde $z = 3$.

Vamos calcular alguns dos múltiplos de 2 multiplicando o 2 por todos os números naturais de 0 a 10.

$2 \cdot 0 = 0$
$2 \cdot 1 = 2$
$2 \cdot 2 = 4$
$2 \cdot 3 = 6$
$2 \cdot 4 = 8$
$2 \cdot 5 = 10$
$2 \cdot 6 = 12$
$2 \cdot 7 = 14$
$2 \cdot 8 = 16$
$2 \cdot 9 = 18$
$2 \cdot 10 = 20$

Assim, temos que o conjunto N dos múltiplos de 2 é N = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20...}.

Lembre-se de que o conjunto dos múltiplos é **infinito**!

Sejam dois números naturais $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, temos que $\boldsymbol{x}$ é divisor de $\boldsymbol{y}$ quando existe um número natural z tal que $z = \frac{y}{x}$ de maneira que **não haja resto na divisão**.

Dessa maneira, temos que **5 é divisor de 300,** uma vez que $300 \div 5 = z$, tal que $z = 60$.

Para encontrarmos os divisores de um número, verificamos se o resultado da divisão é inteiro. Vejamos os divisores de 30:

$30 \div 30 = 1$
$30 \div 15 = 2$
$30 \div 10 = 3$
$30 \div 6 = 5$
$30 \div 5 = 6$
$30 \div 3 = 10$
$30 \div 2 = 15$
$30 \div 1 = 30$

Temos, então, que o conjunto D dos divisores de 30 é dado por D = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30}.

Perceba que, ao contrário do conjunto dos múltiplos, o conjunto dos divisores é **finito**!

ALGORITMO DA DIVISÃO

Quando dividimos A por B, queremos repartir a quantidade A em partes de mesmo valor, sendo um total de B partes.

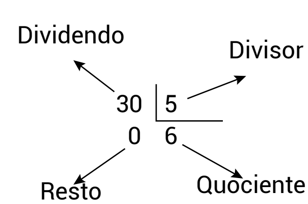
Ex.: Ao dividirmos 50 por 10, queremos dividir 50 em 10 partes de mesmo valor. Ou seja, nesse caso teremos 10 partes de 5 unidades, pois se multiplicarmos 10 x 5 = 50. Ou ainda podemos somar 5 unidades 10 vezes consecutivas, ou seja, 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=50.

Algo que é muito importante e você deve lembrar sempre são as regras de sinais na divisão de números.

SINAIS NA DIVISÃO		
Operações		Resultados
+	+	+
-	-	+
+	-	-
-	+	-

> **Dica**
> ● A divisão de números de mesmo sinal tem resultado positivo.
> Ex.: $60 \div 3 = 20$; $(-45) \div (-15) = 3$
> ● A divisão de números de sinais diferentes tem resultado negativo.
> Ex.: $25 \div (-5) = -5$; $(-120) \div 5 = -24$

Esquematizando:



Dividendo = Divisor × Quociente + Resto
$30 = 5 \cdot 6 + 0$

Principais propriedades da operação de divisão:

- Propriedade comutativa: a divisão não possui essa propriedade.
- Propriedade associativa: a divisão não possui essa propriedade.
- Elemento neutro: a unidade (1) é o elemento neutro da divisão, pois ao dividir qualquer número por 1, o resultado será o próprio número.

Ex.: 15 / 1 = 15.

- Propriedade do fechamento: aqui chegamos em uma diferença enorme dentro das operações de números inteiros, pois a divisão não possui essa propriedade, uma vez que ao dividir números inteiros podemos obter resultados fracionários ou decimais.

Ex.: 2 / 10 = 0,2 (não pertence ao conjunto dos números inteiros).

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Quando temos problemas que envolvem divisão, sabe-se que precisamos de uma maneira mais eficiente e simples para poder achar o resultado. Pensando nisso, temos as regras de divisibilidade, ou seja, ferramentas que nos ajudam nas operações de divisão. Há apenas duas opções em relação ao resultado: a resposta é exata ou não. Vejamos as diversas regras.

Divisibilidade por 2

Um número é divisível por 2 quando ele é par, ou seja, todos os números em que o último algarismo é 0, 2, 4, 6 ou 8 → 256 ÷ 2 = 128.

Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos é divisível por 3. Exemplo: 1.236 é divisível por 3, pois a soma de seus algarismos é 1 + 2 + 3 + 6 = 12 (12 é divisível por 3) → 1.236 ÷ 3 = 412.

Divisibilidade por 4

Um número é divisível por 4 quando os dois últimos algarismos também são divisíveis por 4 ou são terminados em 00. Exemplos:

- 3.664 é divisível por 4, pois os dois últimos algarismos são “64”, e 64 é divisível por 4 → 3.664 ÷ 4 = 916;
- 1.500 é divisível por 4, pois o final é 00 → 1.500 ÷ 4 = 375.

Divisibilidade por 5

Todos os números que possuem como último algarismo os números 0 ou 5 são divisíveis por 5 → 550 ÷ 5 = 110; ou 1.325 ÷ 5 = 265.

Divisibilidade por 6

Todos os números que são divisíveis por 2 e por 3, simultaneamente, são divisíveis por 6. Exemplo: 366 é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo, então também é divisível por 6 → 366 ÷ 6 = 61.

Divisibilidade por 7

Devemos duplicar (dobrar) o algarismo das unidades e subtrair o resto do número. Se o resultado dessa operação for divisível por 7, então o número é divisível por 7. Tomemos como exemplo o número 385:

- dobra-se o algarismo das unidades: 5 · 2 = 10;
- subtrai-se o restante do número: 38 – 10 = 28;
- o resultado é divisível por 7, pois 28 ÷ 7 = 4;
- desta forma, 385 é divisível por 7:
  - 385 ÷ 7 = 55.

Divisibilidade por 8

Se os três últimos algarismos forem divisíveis por 8, ou for número terminado em 000, então esse número será divisível por 8 → 2.000 ÷ 8 = 250.

Veja mais um exemplo: 1.256 é divisível por 8, pois os três últimos algarismos “256” são divisíveis por 8, ou seja, 256 ÷ 8 = 32. Assim, 1.256 ÷ 8 = 157.

Divisibilidade por 9

Um número é divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos é divisível por 9. Exemplo: 5.238 é divisível por 9?

- somando-se os algarismos: 5 + 2 + 3 + 8 = 18 (18 é divisível por 9);
- desta forma, 5.238 é divisível por 9:
  - 5.238 ÷ 9 = 582.

Divisibilidade por 10

Todos os números terminados em 0 são divisíveis por 10 → 1.130 ÷ 10 = 113.

MÁXIMO DIVISOR COMUM (ENTRE NÚMEROS INTEIROS)

O Máximo Divisor Comum de dois ou mais números é o maior número que é divisor comum de todos os números dados.

Exemplo: encontrar o MDC entre 18 e 24.

- Divisores naturais de 18: D (18) = {1, 2, 3, 6, 9, 18};
- Divisores naturais de 24: D (24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}.

Pode-se escrever, agora, os divisores comuns a 18 e 24: D (18) ∩ D (24) = {1, 2, 3, 6}.

Observando os divisores comuns, podemos identificar o maior divisor comum dos números 18 e 24, ou seja: MDC (18,24) = 6.

Outra técnica para o cálculo do MDC é a **decomposição em fatores primos**. Para obter o MDC de dois ou mais números por este processo, decompõe-se cada número dado em fatores primos.

O MDC é o produto dos fatores comuns obtidos, cada um deles elevado ao seu menor expoente.

Vamos, então, achar o MDC entre 300 e 504.

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \qquad 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Veja que o 2 e o 3 se repetem em ambas as fatorações, então pegaremos eles com seus menores expoentes para calcular o MDC, ou seja, 2^2 e 3.

$$\text{MDC } (300, 504) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (ENTRE NÚMEROS INTEIROS)

O Mínimo Múltiplo Comum de dois ou mais números é o menor número positivo que é múltiplo comum de todos os números dados.

Exemplo: encontrar o MMC entre 8 e 6.

- Múltiplos positivos de 6: M (6) = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54,...};
- Múltiplos positivos de 8: M (8) = {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64,...}.

Podem-se escrever, agora, os múltiplos positivos comuns: M(6) ∩ M(8) = {24, 48, 72,...}

Observando os múltiplos comuns, pode-se identificar o Mínimo Múltiplo Comum dos números 6 e 8, ou seja: MMC(6,8) = 24.

Temos outra técnica para o cálculo do MMC, que é a **decomposição isolada em fatores primos**. Para obter o MMC de dois ou mais números por este processo, é necessário decompormos cada número dado em fatores primos.

O MMC é o produto dos fatores comuns e não comuns, cada um deles elevado ao seu maior expoente.

Vamos, então, achar o MMC entre 18 e 120.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 3 \\ 30 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$18 = 2 \cdot 3^2 \qquad 120 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

Vamos, agora, multiplicar os fatores comuns e não comuns elevados ao seu maior expoente:

$$\text{MMC } (18,120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$$

Para fixar o conteúdo visto, resolva, a seguir, o exercício comentado.

1. (FEPESE — 2016) João trabalha 5 dias e folga 1, enquanto Maria trabalha 3 dias e folga 1. Se João e Maria folgam no mesmo dia, então quantos dias, no mínimo, passarão para que eles folguem no mesmo dia novamente?

a) 8.
b) 10.
c) 12.
d) 15.
e) 24.

O período em que João trabalha e folga corresponde a 6 dias, enquanto o mesmo período, para Maria, corresponde a 4 dias. Assim, o problema consiste em encontrar o MMC entre 6 e 4. Decompondo o 6 e o 4, temos que 6 = 2 · 3 e 4 = 2², logo MMC (6,4) = 2² · 3 = 4 · 3 = 12. Resposta: Letra C.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

OPERAÇÕES: ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO, MULTIPLICAÇÃO, DIVISÃO - PROPRIEDADES DESSAS OPERAÇÕES

Números Naturais

Os números construídos com os algarismos de 0 a 9 são chamados de naturais. O símbolo desse conjunto é a letra N, e podemos escrever os seus elementos entre chaves: N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...}.

Os três pontos, conhecidos como reticências, indicam que este conjunto tem infinitos números naturais.

O zero não é um número natural propriamente dito, pois não é um número de "contagem natural". Utiliza-se o símbolo N* para designar os números naturais positivos (excluindo o zero). Veja: N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...}.

> **Importante!**
> O símbolo do conjunto dos números naturais é a letra N, e podemos ter, ainda, o símbolo N*, que representa os números naturais positivos, isto é, excluindo o zero.

Conceitos básicos relacionados aos números naturais:

- **Sucessor**: é o próximo número natural.
  - **Exemplo**: o sucessor de 4 é 5, e o sucessor de 51 é 52. Ou seja, o sucessor do número "n" é o número "n + 1".
- **Antecessor**: é o número natural anterior.
  - **Exemplo**: o antecessor de 8 é 7, e o antecessor de 77 é 76. Ou seja, o antecessor do número "n" é o número "n – 1";

- **Números consecutivos**: são números em sequência.

  - **Exemplo**: 5, 6, 7 são números consecutivos, porém 10, 9, 11 não são. Assim, (n – 1, n e n + 1) são números consecutivos;

- **Números naturais pares**: são aqueles que, ao serem divididos por 2, não deixam resto. Por isso, o zero também é par. Logo, todos os números que terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8 são pares;
- **Números naturais ímpares**: ao serem divididos por 2, deixam o resto 1;
- **Todos** os números que terminam em **1**, **3**, **5**, 7 ou **9** são **ímpares**.

Também é importante lembrar que:

- a soma ou subtração de dois números pares tem resultado par:

$$12 + 8 = 20 \mid 12 - 8 = 4$$

- a soma ou subtração de dois números ímpares tem resultado par:

$$13 + 7 = 20 \mid 13 - 7 = 6$$

- a soma ou subtração de um número par com outro ímpar tem resultado ímpar:

$$14 + 5 = 19 \mid 14 - 5 = 9$$

- a multiplicação de números pares tem resultado par:

$$8 \cdot 6 = 48$$

- a multiplicação de números ímpares tem resultado ímpar:

$$3 \cdot 7 = 21$$

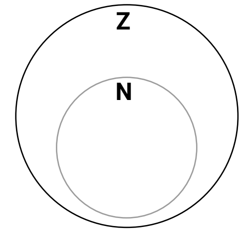
- a multiplicação de um número par por um número ímpar tem resultado par:

$$4 \cdot 5 = 20$$

Números Inteiros

Os números inteiros são os números naturais e seus respectivos opostos (negativos). Veja: Z = {..., –7, –6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}.

O símbolo desse conjunto é a letra Z. Uma coisa importante é saber que todos os números naturais são inteiros, mas nem todos os números inteiros são naturais. Sendo assim, podemos representar por meio de diagramas e afirmar que o conjunto de números naturais está contido no conjunto de números inteiros, ou, ainda, que N é um subconjunto de Z. Observe:



Podemos destacar alguns subconjuntos de números. Veja:

- Números inteiros não negativos: {4, 5, 6...}. Veja que são os números naturais;
- Números inteiros não positivos: {... –3, –2, –1, 0}. Veja que o zero também faz parte deste conjunto, pois ele não é positivo nem negativo;
- Números inteiros negativos: {... –3, –2, –1}. O zero não faz parte;
- Números inteiros positivos: {5, 6, 7...}. Novamente, o zero não faz parte.

Operações com Números Inteiros

Há quatro operações básicas que podemos efetuar com estes números. São elas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Adição

É dada pela soma de dois números. Ou seja, a adição de 20 e 5 é: 20 + 5 = 25.

Veja mais alguns exemplos:

- Adição de 15 e 3: 15 + 3 = 18;
- Adição de 55 e 30: 55 + 30 = 85.

- **Principais Propriedades da Operação de Adição**

  - **Propriedade comutativa**: a ordem dos números não altera a soma → 115 + 35 é igual a 35 + 115;
  - **Propriedade associativa**: quando é feita a adição de 3 ou mais números, podemos somar 2 deles primeiramente, e, depois, somar o outro. Independentemente da ordem, vamos obter o mesmo resultado → 2 + 3 + 5 = (2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5) = 10;
  - **Elemento neutro**: o zero é o elemento neutro da adição, pois qualquer número somado a zero é igual a ele mesmo → 27 + 0 = 27; 55 + 0 = 55;
  - **Propriedade do fechamento**: a soma de dois números inteiros sempre gera outro número inteiro. Exemplo: a soma dos números inteiros 8 e 2 gera o número inteiro 10 (8 + 2 = 10).

Subtração

Subtrair dois números é o mesmo que diminuir de um deles o valor do outro. Ou seja, subtrair 7 de 20 significa retirar 7 de 20, restando 13: 20 – 7 = 13.

Veja mais alguns exemplos:

- Subtrair 5 de 16: 16 – 5 = 11;
- 10 subtraído de 30: 30 – 10 = 20.

- **Principais Propriedades da Operação de Subtração**

  - **Elemento neutro**: o zero é o elemento neutro da subtração, pois, ao subtrair zero de qualquer número, este número permanecerá inalterado → 13 – 0 = 13;
  - **Propriedade do fechamento**: a subtração de dois números inteiros sempre gera outro número inteiro → 33 – 10 = 23.

Multiplicação

A multiplicação funciona como se fosse uma repetição de adições. Veja: a multiplicação 20 · 3 é igual à soma do número 20 três vezes (20 + 20 + 20), ou à soma do número 3 vinte vezes (3 + 3 + 3 + ... + 3).

Algo que é muito importante e que deve ser sempre lembrado são as regras de sinais na multiplicação de números.

SINAIS NA MULTIPLICAÇÃO		
Operações		**Resultados**
+	+	+
-	-	+
+	-	-
-	+	-

Atenção:

- a multiplicação de números de mesmo sinal tem resultado positivo: 51 · 2 = 102; (–33) · (–3) = 99;
- a multiplicação de números de sinais diferentes tem resultado negativo: 25 · (–4) = –100; (–15) · 5 = –75.

- **Principais Propriedades da Operação de Multiplicação**

  - **Propriedade comutativa**: A · B é igual a B · A, ou seja, a ordem não altera o resultado → 8 · 5 = 5 · 8 = 40;
  - **Propriedade associativa**: (A · B) · C é igual a (C · B) · A, que é igual a (A · C) · B → (3 · 4) · 2 = 3 · (4 · 2) = (3 · 2) · 4 = 24;
  - **Elemento neutro**: a unidade (1) é o elemento neutro da multiplicação, pois ao multiplicar 1 por qualquer número, esse número permanecerá inalterado → 15 · 1 = 15;
  - **Propriedade do fechamento**: a multiplicação de números inteiros sempre gera um número inteiro → 9 · 5 = 45;
  - **Propriedade distributiva**: essa propriedade é exclusiva da multiplicação. Veja como fica: A · (B + C) = (A · B) + (A · C), ou seja, 3 · (5 + 7) = 3 · (12) = 36.

    Usando a propriedade: 3 · (5 + 7) = 3 · 5 + 3 · 7 = 15 + 21 = 36.

Divisão

Quando dividimos A por B, queremos repartir a quantidade A em partes de mesmo valor, sendo um total de B partes.

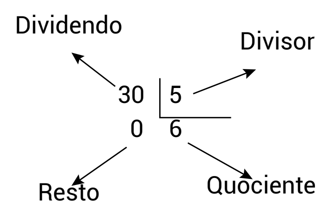
Exemplo: temos 50 balas e queremos dividir entre 10 pessoas, isto é, queremos dividir 50 em 10 partes de mesmo valor. Ou seja, nesse caso, teremos 10 partes de 5 unidades, pois se multiplicarmos 10 · 5 = 50. Ou, ainda, podemos somar 5 unidades 10 vezes consecutivas, ou seja, 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 50.

Algo que é muito importante e que deve ser lembrado são as regras de sinais na divisão de números, que é a mesma regra de sinais para a multiplicação de números.

SINAIS NA DIVISÃO		
Operações		**Resultados**
+	+	+
–	–	+
+	–	–
–	+	–

Atenção:

Esquematizando:



Dividendo = Divisor · Quociente + Resto
30 = 5 · 6 + 0

- **Principais Propriedades da Operação de Divisão**

  - **Elemento neutro**: a unidade (1) é o elemento neutro da divisão, pois, ao dividir qualquer número por 1, o resultado será o próprio número → 15 ÷ 1 = 15.

> **Importante!**
> A divisão não possui propriedade do fechamento, diferenciando-se das demais operações com números inteiros. A divisão não possui essa propriedade, uma vez que, ao dividir números inteiros, podemos obter resultados fracionários ou decimais: 2 ÷ 10 = 0,2 (não pertence ao conjunto dos números inteiros).

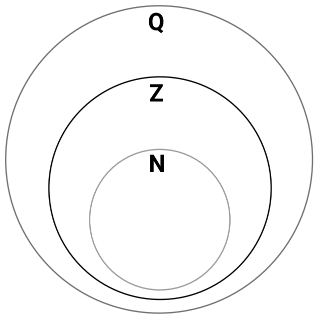
Números Racionais

São aqueles que podem ser escritos na forma da divisão (fração) de dois números inteiros. Ou seja, escritos na forma $\frac{A}{B}$ (A dividido por B), em que A e B são números inteiros.

Exemplos: $\frac{7}{4}$ e $-\frac{15}{9}$ são racionais. Veja, também, que os números 87, 321 e 1221 são racionais, pois são divididos pelo número 1.

Atenção! Qualquer número natural é também inteiro e todo número inteiro é também racional.

O símbolo desse conjunto é a letra Q e podemos representar por meio de diagramas a relação entre os conjuntos naturais, inteiros e racionais. Veja:



Representação Fracionária e Decimal

Há três tipos de números no conjunto dos números racionais:

- **Frações**: $\frac{8}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{11}$ etc.;
- **Números decimais com finitas casas**: 1,75;
- **Dízimas periódicas**: 0,33333...

Operações e Propriedades dos Números Racionais

As operações de adição e subtração de números racionais seguem a mesma lógica das operações com números inteiros. Veja:

$$15{,}25 + 5{,}15 = 20{,}4 \qquad \begin{array}{r} 15{,}25 \\ +05{,}15 \\ \hline 20{,}40 \end{array}$$

$$57{,}3 - 0{,}12 = 57{,}18 \qquad \begin{array}{r} 57{,}30 \\ +00{,}12 \\ \hline 57{,}18 \end{array}$$

- **Multiplicação de números decimais**: aplicamos o mesmo procedimento da multiplicação comum, contudo, precisamos ficar atentos à colocação da vírgula.

$$4{,}06 \cdot 1{,}70 = 6{,}9020 \text{ ou } 6{,}902$$

$$\begin{array}{rl} 4{,}06 & \rightarrow \text{2 casas decimais} \\ \text{x } 1{,}70 & \rightarrow \text{2 casas decimais} \\ \hline 000 & \\ 2842 & \\ +\ 406 & \\ \hline 6{,}9020 & \rightarrow \text{4 casas decimais} \end{array}$$

- **Divisão de números decimais**: devemos multiplicar ambos os números (divisor e dividendo) por uma potência de 10 (10, 100, 1000, 10000 etc.), de modo a retirar todas as casas decimais presentes. Após isso, é só efetuar a operação normalmente.

$$5{,}7 \div 1{,}3$$
$$5{,}7 \cdot 100 = 570$$
$$1{,}3 \cdot 100 = 130$$
$$570 \div 130 = 4{,}3846...$$

- **Multiplicação de frações**: para multiplicar frações, precisamos apenas efetuar as operações normalmente, numeradores com denominadores.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

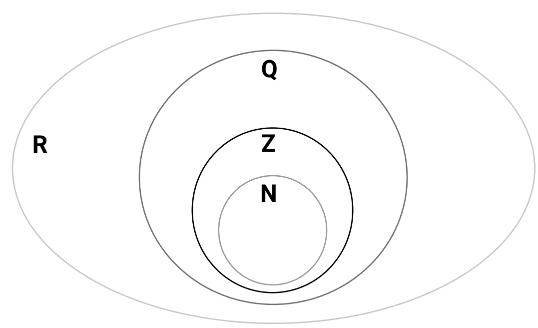
- **Divisão de frações**: para dividir frações, precisamos conservar a primeira fração e dividir pelo inverso da segunda.

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Números Reais

É o conjunto que envolve todos os outros conjuntos, ou seja, aqui encontramos os números naturais, inteiros e racionais, envolvidos de uma única maneira. Dentro dos números reais, podemos envolver todos os outros números dentro das operações matemáticas, sejam elas de adição, subtração, multiplicação ou divisão.

O símbolo desse conjunto é a letra R, e podemos representar, por meio de diagramas, a relação entre os conjuntos naturais, inteiros, racionais e reais. Veja:



Operações e Propriedades dos Números Reais

As operações adição, subtração, multiplicação e divisão ocorrem com os números reais tal como ocorre com os números racionais.

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO NOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

A matemática nasceu das necessidades humanas de controle de sistemas de ordem social, como o número de indivíduos nos rebanhos, as operações financeiras antigas envolvendo trocas, a tentativa de entender os processos astronômicos, entre outros.

As operações simples nasceram da contagem nos dedos, por exemplo. A poderosa matemática que hoje conduz aos estudos das previsões do tempo, do lançamento de foguetes ao espaço, da física quântica e da relatividade, teve origem nas contas feitas nos dedos! Logo, ela é derivada de raciocínios simples que, somados, levam à complexidade.

Nesse sentido, vamos seguir um raciocínio simples para que você entenda a potenciação, de onde ela nasceu e, depois, sua operação inversa, a radiciação.

Depois de um tempo usando os números, já em notações escritas, deve-se ter percebido que a multiplicação é a soma de fatores iguais. Veja:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \text{ vezes o } 3 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Importante!

Muitas vezes, vemos nos livros didáticos um erro de notação matemática. O símbolo do produto ou multiplicação pode ser x (que pode ser confundido com a letra x num texto), * ou ·· . No entanto, não pode ser *, em cima na linha, nem . embaixo. O asterisco e o ponto devem estar no meio da linha. Um ponto na parte debaixo pode ser confundido com a notação de decimal, por exemplo, 3.2 é um decimal e $3 \cdot 2$ é 6.

Mesmo um número $x \in \mathbb{R}$ pode ser multiplicado considerando sua parte fracionária ou decimal:

$$2.142857 + 2.142857 = 2 \text{ vezes o } 2.142857 = 2 \cdot 2.142857 = 4.285714.$$

Usando o mesmo raciocínio, a potenciação nasceu da multiplicação de fatores iguais:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ multiplicado 4 vezes por ele mesmo.}$$

Uma das principais evoluções que ocorreram na matemática foi o desenvolvimento das notações, uma espécie de alfabeto modificado para que seja mais fácil a comunicação; essa linguagem matemática usa símbolos vários, alguns mais complexos, com significados também complexos, mas não é o caso da linguagem utilizada no ensino médio.

A notação para $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ = 2 multiplicado 4 vezes por ele mesmo = 2^4.

Cada número recebe um nome para que possamos nos comunicar sobre esse tema, a potenciação.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Base}}}{2}^{4 \rightarrow \text{Expoente}}$$

O expoente recebe, também, o nome de potência; assim, dizemos que a base 2 está elevada a 4ª potência ou ao expoente 4.

Para entendermos que os expoentes podem fazer parte de qualquer conjunto de número (aqui, vamos até o conjunto dos números $\mathbb{R}$), precisamos compreender um pouco mais sobre a multiplicação. Baseados na soma que gerou a multiplicação, podemos fazer uma multiplicação um pouco mais complexa do que aquela do exemplo acima usando os fatores de soma. Vejamos:

$35 \cdot 10.5 = 367.5$ é feito usando um algoritmo de multiplicação aprendido cedo na escola:

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times\ 10{,}5 \\ \hline 175 \\ +\ \ 00\ \ \\ 35\ \ \ \\ \hline 367{,}5 \end{array}$$

Aqui vemos a soma intrínseca na multiplicação; o uso desse algoritmo é feito multiplicando cada número do 10.5 por 35. Com o aumento de uma casa decimal, o resultado do produto avança uma casa para a esquerda, por isso, o 0 está debaixo do 7 e o 5, debaixo do 3. Feita a soma, conta-se o número de casas decimais, nesse caso, uma, e coloca-se no resultado da soma a vírgula ou ponto após o mesmo número de casas contadas nos produtos.

Um dos principais problemas no ensino de matemática é a escassez de informações fornecidas aos estudantes sobre o uso correto do sistema decimal. É de bom alvitre que o estudante procure conhecer melhor os algoritmos derivados das operações matemáticas básicas em função dos conhecimentos do sistema decimal.

Em função do que explicamos, podemos fazer aquela conta mentalmente, veja: separamos a casa decimal, 0.5 e fazemos a multiplicação de 35 por 10, que dá 350, e somamos a multiplicação de 0.5 vezes 35, que, na verdade, é a metade de 35, i.e., 17.5.

Agora ficou fácil, somamos 350 a 17.5 e temos 367.5.

Baseados nesse raciocínio, podemos, também, usá-lo na potenciação, vejamos um caso como exemplo:

$2^{3.5}$ = considerando a composição de fatores,temos, $2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^{0.5} = 2^3 \cdot 2^{0.5}$

Voltamos, então para a soma, i.e., $2^3 \cdot 2^{0.5} = 2^{3+0.5} = 2^{3.5}$. Aqui, acrescentamos uma propriedade natural da potenciação, os expoentes de mesma base podem ser somados; veremos mais sobre isso à frente.

Nossa intenção não é dar a resposta dessa potência, mas mostrar que raciocinar sobre potência associa as bases soma e produto e mostra que a potência pertence ao conjunto $\mathbb{R}$.

Pertencer a $\mathbb{R}$ significa que temos potências que pertencem aos conjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$), aos inteiros ($\mathbb{Z}$), aos racionais, aos irracionais. Vamos estudar cada caso, tanto de potenciação quanto de radiciação em tópicos à frente.

Em termos de radiciação, considere o raciocínio. O número $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ (leia as equações devagar e traduzindo para a língua portuguesa, nesse caso, oito é igual a três vezes 2 que é igual 2 elevado ao expoente 3), que significa dizer que a raiz cúbica de 8 é um número que, ao ser multiplicado 3 vezes por si mesmo, é igual a 8; nesse caso, o número deve pertencer ao conjunto dos reais e ser positivo como condição necessária para usar essa notação. A representação em linguagem matemática desse raciocínio é $\sqrt[3]{8} = 2$.

Assim como na representação matemática da potenciação, cada número recebe um nome na estrutura da radiciação:

$$\text{Índice} \leftarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Base}}}{\sqrt[3]{8}}$$

Em geral nos problemas sobre radiciação, podemos usar o conceito de fatoração.

Importante!

A fatoração é a decomposição de um produto por seus componentes básicos. Uma vez que os números primos são por definição divisíveis apenas por 1 e por si mesmos, fatorar um número qualquer é decompô-lo no produto entre os números primos pelos quais ele é divisível.

Para a raiz cúbica de 216 $\left(\sqrt[3]{216}\right)$, veja a fatoração em números primos:

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Dizemos que 216 fatorado é 216 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3 · 3 = $(2^3 \cdot 3^3) = (2 \cdot 3)^3$, fazendo a substituição $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{(2.3)^3}$ = 2 · 3 = 6. Observe que a multiplicação de bases diferentes com o mesmo expoente é a multiplicação das bases, entre parênteses, elevada ao expoente igual.

Podemos ter casos vários casos dentro dos conjuntos de números com algumas restrições que serão mostradas à frente. Aqui, queremos que entenda as ideias e os raciocínios. Vamos analisar o caso de um número cujo raiz enésima com índice de valor n (veja o que é índice na figura de raiz cúbica de 8, acima) de um número qualquer não apresenta valor inteiro ou racional.

Considere $\sqrt{18}$ (nos casos em que o índice é omitido, n = 2). Fatorando, temos:

18	2
9	3
3	3
1	

Então, temos, neste caso $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt{2}$. Veja que o 3 foi retirado da raiz quadrada por estar elevado ao quadrado, e o 2 permaneceu. Essa simplificação é considerada elegante entre os matemáticos.

Potenciação e Radiciação com Expoentes Naturais

Consideremos uma potência cuja base é $a \in \mathbb{R}$ e o expoente é $p > 0$ e $p \in \mathbb{N}$ (lembre-se de traduzir calmamente para o português a linguagem matemática). Neste caso, o valor da potência é o número b ∈ R, cujo raiz de índice *p* é o valor *a*.

$$a^n = b \leftrightarrow \sqrt[n]{b} = a$$

Esta afirmação é a base tanto da potenciação quanto da radiciação com números inteiros e mostra o porquê dessas duas operações serem inversas uma da outra.

Quando tratamos de expoentes naturais, estamos analisando as bases para essas operações, também, com os expoentes inteiros, racionais e reais.

Algumas considerações são necessárias, nem sempre entendidas de modo intuitivo. Considere a afirmação $a^0 = 1$, a qual vale para qualquer que seja o valor de a . Podemos interpretar essa igualdade como sendo multiplicado por si mesmo de *a* 0 vezes e, como *a* é alguma coisa, não pode ser nada, e, em termos matemáticos, esse ente é necessário para que outras operações provadas possam ser definidas, então $a^0 = 1$.

Numa outra análise com exemplos, estudemos as potências $(-2)^2$, $(-2)^3$ e -2^2:

$$(-2)^2 = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) = 4$$
$$(-2)^3 = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$
$$-2^2 = (-1) \cdot 2 \cdot 2 = -4$$

Os resultados dessas potências podem ser utilizados como base para qualquer outra potência de expoente natural (lembre o que é base, expoente, índice e radicando).

Qualquer que seja o valor de a , se ele estiver elevado por um número par, resultará em $b > 0 \cdot (\sqrt[n]{b} = a)$, pois, pelo princípio da multiplicação dos números, multiplicar dois números positivos ou dois números negativos resulta sempre em um número positivo.

Caso a < 0, se ele for elevado a um expoente ímpar, o princípio anterior determina que b < 0, pois a multiplicação de números de sinais opostos resulta em um número negativo ($a^n = b$).

Por fim, podemos considerar a importância de se utilizar corretamente a notação apropriada, pois $(-2)^2$ indica que (–2) está sendo multiplicado por si mesmo 2 vezes, porém -2^2 indica que está sendo multiplicado por si mesmo 2 vezes e o resultado multiplicado por (–1).

Para a radiciação, as conclusões anteriores permitem analisar dois casos distintos.

Se b > 0, para qualquer que seja o valor de *n*, a > 0, que é uma propriedade básica da radiciação.

Vejamos isso com calma. A operação $\sqrt{4} = -2$ é uma afirmação incorreta, apesar de $(-2)^2 = 4$, pois não existe um número **real** que multiplicado por ele mesmo gere –2.

Aproveitemos para melhorar a relação entre potenciação e radiciação e explicar o que dissemos acima. Temos que $\sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}$, e que um expoente elevado a um outro expoente pode ser multiplicado, i.e., $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Veja que essa relação pode ser entendida diretamente, pois multiplicando *m* vezes *n*, termos *n · m*.

Agora podemos explicar o motivo de $\sqrt{4} = -2$ não poder existir dentro dos conceitos matemáticos. Então, teremos:

$$\sqrt[2]{41} = -2 \Rightarrow 4^{\frac{1}{2}} = -2 \Rightarrow \left(2^2\right)^{\frac{1}{2}} = -2 \Rightarrow (2)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = -2 \Rightarrow$$
$$(2)^1 = -2\nexists$$

Como solução para essa equação, pois nenhum número real –2 pode ser igual ao seu positivo, a não ser que seja afirmado que esse número é um módulo, i.e., independente da posição na reta dos números reais, o que interessa é sempre a distância do número em relação ao início dos eixos. O número 5 está 5 unidades à direita da origem da reta dos reais e o número –5 está 5 unidades à esquerda da origem da reta dos reais; então, como o que interessa é a distância, os sinais não fazem sentido e representamos o 5 como modulo de 5, i.e., |-5|.

Por outro lado, então, mostrando novamente a importância da notação, temos que $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ e não $\sqrt{(-5)^2} = -5$.

Para o caso de base negativa com expoentes também negativos ímpares, i.e., b < 0, $a \in \mathbb{R}$ apenas se *n* for ímpar resultando em a < 0, por exemplo,

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-2^3} = -2^{\frac{3}{3}} = -2^1 = -2$$

Entretanto, isso não gerará um resultado dentro dos números reais se *n* for par. Faça o teste!

Potenciação e Radiciação com Expoentes Inteiros

Lembre-se de que o conjunto dos números inteiros possui os números negativos, o que não ocorre com o conjunto dos números naturais, então, os principais comentários aqui serão sobre os expoentes negativos.

Pela definição da radiciação, um índice *n* não pode assumir valores negativos ou racionais; entretanto, a mesma restrição não se aplica ao expoente de uma potência.

Pela noção de potência como o produto de um número vezes si mesmo *n* vezes, a ideia de $n < 0$ não apresenta sentido lógico em uma primeira análise; porém, se considerarmos que o sinal do expoente diz respeito ao valor da base da potência, a situação se altera.

Veja o caso de 2^{-1}. Ele representa o inverso da potência 2^1, portanto:

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

Importante!

O inverso de um número qualquer $a \in \mathbb{R}$ é um número qualquer $b \in \mathbb{R}$ que torne a igualdade $a \cdot b = 1$ verdadeira. Logo $b = \frac{1}{a}$.

Considerando agora uma potência de base *a* e expoente $n < 0$, i.e., $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$ para demostrar uma relação mais detalhada, podemos mostrar que corretamente temos $a^{-n} = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$.

Essa definição é importante na resolução de problemas em equações exponencias. Veja o exemplo:

$$2^2 \cdot 2^{-1} \cdot 3 \; \frac{2^2 \cdot 3}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 2 \cdot 3 = 6$$

Uma observação importante é que, pela definição acima, o número 0^n é um símbolo sem significado, uma vez que o inverso de 0 não existe para o conjunto dos números reais.

Potenciação e Radiciação com Expoentes Racionais

Os números racionais são aqueles que possuem casas decimais finitas ou infinitas com repetição dos números.

A potenciação com expoentes racionais abre precedente para uma interpretação mais detalhada da ideia da radiciação. Já vimos isso anteriormente, mas agora falaremos novamente.

Tomemos $\sqrt{16} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2} = \sqrt{(2 \cdot 2)^2} = 2 \cdot 2 = 2^2$. É possível perceber que, se $2^4 = 4^2 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16} = \sqrt{4} = 2$, melhorando para o uso dos números racionais mais diretamente,

$$\sqrt[4]{16} = (16)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4}{4}} = 2.$$

Agora tomemos $\sqrt{2}$, sendo que $(\sqrt{2})^2 = 2 = \sqrt{4}$, por substituição $\sqrt{2} = \sqrt{\sqrt{4}}$. Para descobrirmos como calcular isso, apenas devemos nos perguntar quantas *n* vezes devemos multiplicar $\sqrt{2}$ por si mesmo para que o resultado seja 4, tal que $\sqrt[n]{b} = \sqrt{2}$. Se a resposta for *n*=4, ela está correta. Vejamos,

$$\sqrt{\sqrt{4}} = (\sqrt{4})^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Acompanhe as operações acima com calma e atenção.

Como raciocinar dessa maneira está longe da praticabilidade em uma prova, vamos resumir isso afirmando que qualquer radiciação de radicando *b* e índice *n* pode ser escrita como uma potência de base *b* e expoente $\frac{1}{n}$.

Voltemos ao primeiro exemplo:

$$\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{1}{2}}$$

Podemos ler esse último termo como 2^4 multiplicado a si mesmo $\frac{1}{2}$ vez, isso pode ser transcrito como:

$$2^{4 \cdot \frac{1}{2}} = 2^2$$

Já no segundo caso, teríamos:

$$\sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{4^{\frac{1}{2}}} = (4^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4}$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$$

Com essas comparações estabelecidas, podemos definir uma potência de expoentes racionais mais claramente.

Para uma base $b \in \mathbb{R}$, um expoente $m \in \mathbb{Z}$ um índice $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$, uma potência de expoentes racionais é definida como $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$, com $\frac{m}{n} \in Q$, como já mostrado acima.

Potenciação e Radiciação com Expoentes Reais

Por fim, ao tratarmos de potências cujos expoentes pertencem ao conjunto dos números reais, estamos nos referindo aos casos em que o expoente $m \in \mathbb{Q}$ v (ou) $m \in \mathbb{I}$. Sendo Q o símbolo dos números racionais e $\mathbb{I}$ dos irracionais.

Os casos em que $m \in \mathbb{I}$ dificilmente são pedidos no ensino médio, apesar de existirem, e são calculados a partir de aproximações utilizando expoentes racionais. Por exemplo, o número π com casas decimais infinitas e não repetitivas é usado para calcular rotas de navegações interplanetárias, a NASA usa o número π com 15 casas decimais.

No caso de um expoente irracional α e uma base real *a*, temos então que, para quaisquer dois expoentes racionais *r e s* tais que $r < \alpha < s$, é verdadeiro $a^r < a^\alpha < a^s$.

Como consequências das noções de potências de expoentes naturais e expoentes negativos: 0^α é um símbolo sem significado para $\alpha < 0$, assim como a^α para $a < 0$, uma vez que **números irracionais não podem ser classificados como par ou ímpar.**

Baseados nos conceitos e definições anteriores, podemos agora listar as propriedades das operações envolvendo potências e raízes de números naturais. Essas afirmações são válidas para quaisquer números a ∧(e), $b \in \mathbb{R}$, $p \wedge q \in \mathbb{R}$ e $n \wedge m \in \mathbb{N}$:

- $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

$$2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

- $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$$\frac{2^3}{2^2} = 2^3 \cdot 2^{-2} = 2^{3+(-2)} = 2^1$$

- $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$

$$(2 \cdot 3)^2 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

- $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

- $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

$$(2^2)^2 = (2^2) \cdot (2^2) = 2^{2+2} = 2^{2 \cdot 2} = 2^4 = 16$$

> **Dica**
>
> Atente-se à interpretação de notações! Apesar de a^{p^q} e $(a^p)^q$ possuírem notações similares, o primeiro caso representa que o expoente p está elevado ao expoente q, enquanto o segundo indica que a potência de a^p está elevada ao expoente q.

- $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n \cdot m]{a^{p \cdot m}}$

$$\sqrt[4]{26} = \sqrt[2.2]{2^{3.2}} = 2^{\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

- $(\sqrt[n]{a})^p = (\sqrt[n]{a^p})$

$$\left(\sqrt{2}\right)^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^4} = 4$$

- $\cdot \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

A aplicação dos princípios anteriores facilita na hora de resolução de cálculos envolvendo números grandes ou expressões extensas. O primeiro caso permite que operações envolvendo multiplicação ou divisão sejam feitas utilizando valores menores, enquanto o segundo reduz expressões para formas mais inteligíveis e fáceis de analisar.

Agora, em termos de cálculo da raiz quadrada e outras raízes, você receberá algoritmos que poderão diminuir em muito o tempo dos seus cálculos em provas.