Escola de Especialistas de Aeronáutica

EEAR

Curso de Formação de Sargentos

NV-003JL-24-EEAR-ESCOLA-ESP-AER-FAB
Cód.: 7908428808877

SUMÁRIO

MATEMÁTICA

ÁLGEBRA I

FUNÇÕES: DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO; FUNÇÕES DEFINIDAS POR FÓRMULAS

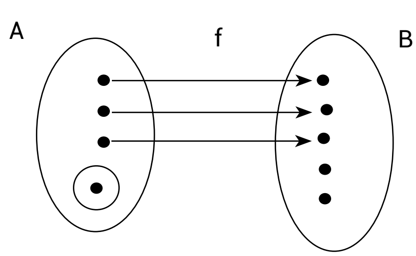
Mesmo que você ainda não saiba o conceito de função, você já lidou com elas no seu cotidiano, direta ou indiretamente, seja no cálculo do valor de uma corrida de táxi, seja no cálculo do valor de uma conta de energia. As funções ocorrem quando há a associação entre dois conjuntos, onde todo elemento de um conjunto tem correspondência com um elemento do outro, ou seja, um elemento está em função do outro.

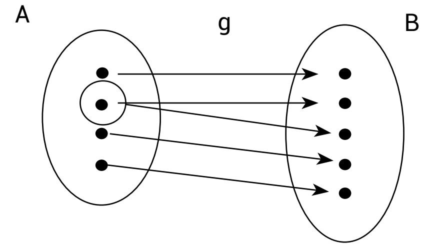
As funções podem ser representadas tanto em tabelas quanto em fórmulas. Para entender melhor essa representação, vamos tomar como exemplo o cálculo do valor de uma corrida de táxi. Nesse cálculo, temos a chamada bandeira, isto é, um valor fixo para qualquer corrida, que será somado com o produto da distância percorrida pelo valor da quilometragem. Se um taxista tem a bandeira 10 e o valor da quilometragem é 3, podemos montar uma fórmula onde o valor pago (VP) é igual ao produto de 3 pela distância percorrida (D) somado com 10, resultando em: VP = 3 · D + 10. Para representar essa função em formato de tabela, precisamos assumir valores para D, já que VP depende diretamente dele, ficando:

DISTÂNCIA (D)	10	15	20	30
VALOR PAGO (VP)	40	55	70	100

Dessa maneira, a definição de **função** é: uma relação f entre um conjunto A e um conjunto B, denotada por f = A → B, onde, para cada x pertencente a A, existe um **único** y no conjunto B.

Na figura abaixo, observa-se que as relações f e g não são funções, pois, para f, nem todo elemento de A tem um respectivo em B. Já para a relação g, não se tem todo elemento de A com um único respectivo em B. A relação h: esta, sim, é uma função, visto que para **todo** elemento de A existe um **único** respectivo em B.





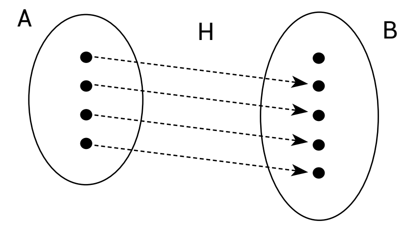


Figura 1. Diagrama de Venn para relações: f, g e h, entre dois conjuntos A e B.

Geralmente, existe uma expressão Y = f(x) que expressa todos os elementos da relação, assim, para representar uma função f, de A em B, segundo uma lei de formação, tem-se:

$$f=\{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B \text{ e } y = f(x)\}$$

ou

$$f: A \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$

Por exemplo, a função f, que associa a cada número real x o número 2x, é expressa da seguinte forma:

$$f=\{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B \text{ e } y = 2x\}$$

ou

$$f: A \to B$$
$$x \mapsto 2x$$

DOMÍNIO, IMAGEM E CONTRADOMÍNIO

O **domínio** (D) é formado por todos os possíveis elementos do conjunto A (D = A) e, nos gráficos, são os valores que a abscissa (eixo x) pode assumir. O **contradomínio** (CD = B) é formado por todos os elementos do conjunto B, que são formados por todos os valores que as ordenadas (eixo y) podem assumir. A imagem (Im) é formada por todos os elementos do contradomínio que se relacionam com algum elemento do domínio. Assim, quando todo elemento x, pertencente a A, está associado a um elemento y, pertencente a B, dizemos que y é a imagem de x e denotamos por y = f(x).

Conjunto imagem ou **imagem** de uma função é o subconjunto formado pelos elementos do contradomínio que possuem algum elemento correspondente no domínio.

> **Importante!**
>
> Se tivermos um elemento do conjunto de partida (A) que não tiver seu respectivo valor em relação ao conjunto (B), então essa relação **não será função**.

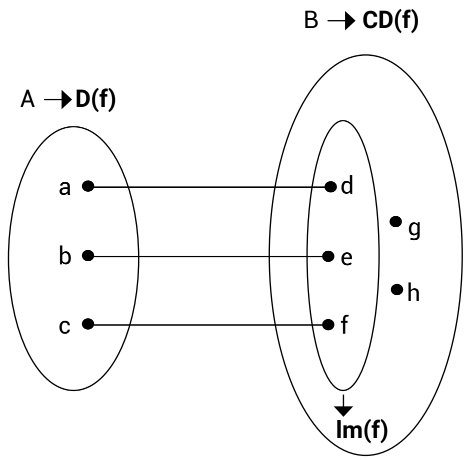


Figura 2. Diagrama A e B, em relação ao domínio (D), contradomínio (CD) e imagem (Im).

FUNÇÕES INJETORA, SOBREJETORA, BIJETORA

As **funções injetoras** são funções tais que os distintos elementos do domínio se relacionam com distintos elementos da imagem, ou seja, dois elementos do domínio não podem ter a mesma imagem (figura 3a). Uma função *f:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x$ é injetora, visto que, para $x_1 \neq x_2$, tem-se $4x_1 \neq 4x_2$, logo, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

As **funções sobrejetoras** são funções nas quais o seu conjunto imagem (Im) é igual ao contradomínio (CD), isto é, Im = CD = B (figura 3b). Sobre funções em que aconteçam as duas situações ao mesmo tempo, ou seja, seriam funções injetoras e sobrejetoras, dizemos que são **funções bijetoras** (figura 3c).

- Diagrama para funções injetoras:

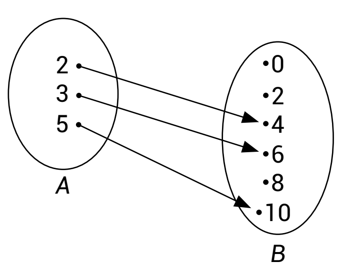


Figura 3a.

- Diagrama para funções sobrejetoras:

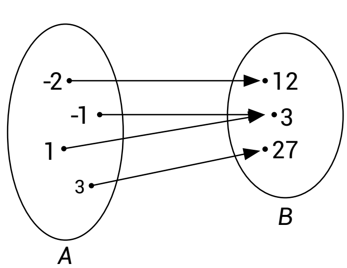


Figura 3b.

- Diagrama para funções bijetoras:

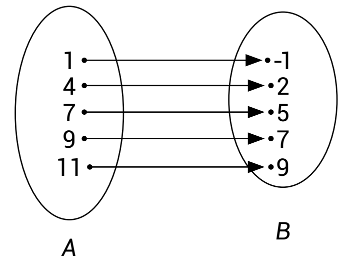
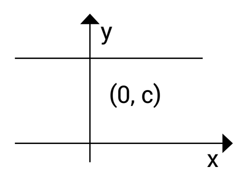


Figura 3c.

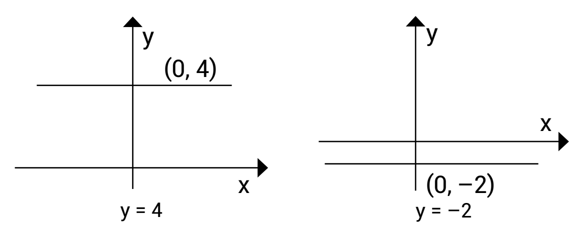
CRESCENTE, DECRESCENTE

Uma relação f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ recebe a denominação de **função constante** quando, a cada elemento de $x \in \mathbb{R}$, associa-se sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$, ou seja, $y = f(x) = c$. O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas (eixo x) passando pelo ponto $(x, y) = (0, c)$ (figura a seguir). Assim, o conjunto imagem (Im) de f é Im = {c}.



Função constante.

Assim, temos exemplos de funções constantes, como mostra a figura a seguir.



Exemplos de função constante.

Uma função f: A → B definida por $y = f(x)$ é dita **função crescente** em um intervalo se para dois valores quaisquer de x_1 e x_2, pertencentes ao intervalo, onde $x_1 < x_2$ resultam em $f(x_1) < f(x_2)$. Ou seja, quando aumentam os valores de x, os valores de y também aumentam (figura 7a).

Uma função f: A → B definida por $y = f(x)$ é dita **função decrescente** em um intervalo se para dois valores quaisquer de X_1 e X_2, pertencentes ao intervalo, onde $x_1 < x_2$ resultam em $f(x_1) > f(x_2)$. Ou seja, quando aumentam os valores de x, os valores de y diminuem (figura 7b).

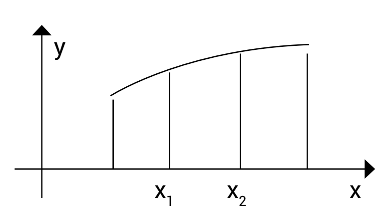


Figura 7a. Exemplo de função crescente.

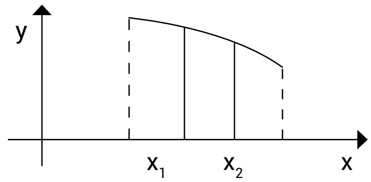


Figura 7b. Exemplo de função decrescente.

COMPOSTA

Para que uma **função composta** f com g exista, f e g devem ser funções dentro do domínio e contradomínio definidos, isto é, $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$. Em outras palavras, para todo x pertencente ao domínio A, teremos um y pertencente ao contradomínio B, tal que $y = f(x)$. De mesma maneira, para todo y pertencente a B, tem-se um z pertencente a C, tal que $z = f(y)$. Assim, pode-se concluir que existe uma função $h: A \rightarrow C$ definida por $h(x) = z$. Esta função ainda pode ser escrita como **fog(x)** (lê-se "f bola g de x") ou $h(x) = f[g(x)]$.

Assim, sejam as funções $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = 3x$, a composta de fog é dada por $f[g(x)] = f[3x] = (3x)^2 + 2 = 9x^2 + 2$.

Já a composta de gof seria: $g[f(x)] = g[(x^2 + 2)] = 3(x^2 + 2) = 3x^2 + 2$.

Importante!

As funções fog e gof são diferentes, isto é, não são comutativas.

Podemos ainda, conhecendo a composta gof, voltar para as funções individuais, f e g. Supondo $f(x) = 2x$ e $f[g(x)] = x + 3$, qual será a função g(x)?

Se $f(x) = 2x$, então $f[g(x)] = 2g(x)$, como temos também que $f[g(x)] = x + 3$, logo:

$$f[g(x)] = 2g(x) = x + 3 \rightarrow g(x) = \frac{x+3}{2}$$

INVERSA

Uma função $f: A \rightarrow B$, bijetora de A em B, ou seja, distintos elementos do domínio (A) se relacionam com distintos elementos da imagem (Im) e a imagem é igual ao contradomínio, que é igual ao conjunto B (Im = CD = B), a relação inversa de f é uma função de $f: B \rightarrow A$, que denominamos de **função inversa** e é denotada por f^{-1}.

Acompanhe o exemplo para ilustrar melhor: uma função $f(x) = 2x - 1$, onde o domínio é dado por A = {1, 2, 3, 4} e o contradomínio e a imagem são dados por B = {1, 3, 5, 7}, resultando em f = {(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)}.

Desta maneira, temos que f é bijetora, visto que $D_f = A$ e a $Im_f = B$. A função inversa de f também é uma função bijetora, visto que para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$ onde $f^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$ $D_{f-1} = B$ e Im_{f-1}. Logo, a sentença da função inversa de f é definida por:

$$f(x) = y = 2x - 1 \rightarrow 2x = y + 1 \rightarrow x = \frac{Y+1}{2}$$

Logo, se $f = \{(x, y) \in A \cdot B \mid y = 2x - 1\}$, então $f^{-1} = \{(y, x) \in B \cdot A \mid x = \frac{y+1}{2}\}$.

Na figura 9, vemos os gráficos das funções f e f^{-1} acima. Percebemos, pela figura 9c, que eles são simétricos, em relação à bissetriz nos quadrantes ímpares do plano cartesiano. Para construir o gráfico, basta plotar os pontos (x, y) ou (y, x) das duas funções no plano cartesiano e traçar uma reta.

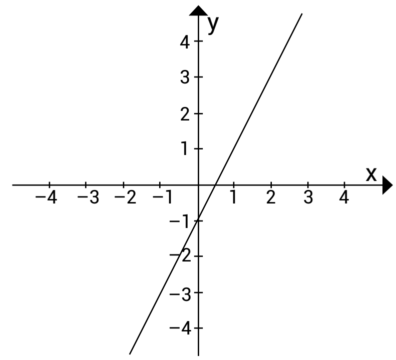


Figura 9a. Função $f(x) = 2x - 1$.

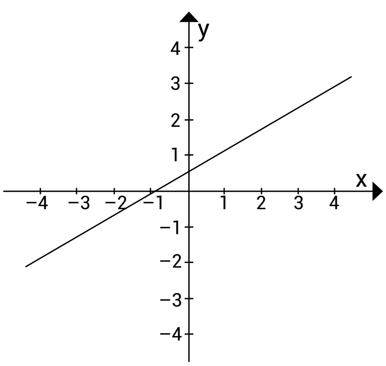


Figura 9b. Função $f^{-1}(x) = \frac{(x+1)}{2}$.

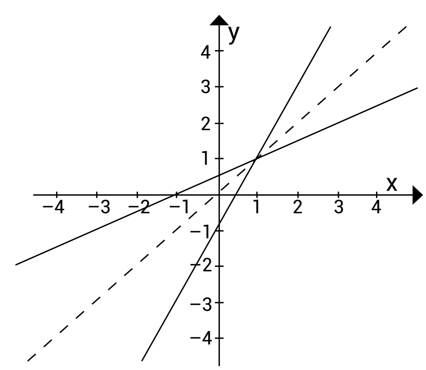


Figura 9c. As duas funções (a e b) mais a bissetriz em pontilhado.

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU E QUADRÁTICA: GRÁFICOS, RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E SISTEMAS

Função Linear e Afim

A **função linear** é uma aplicação de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quando cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ e constante real, ou seja, $f(x) = ax$; $a \neq 0$.

O gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem e liga os pontos (x, y) = (x, ax) no plano cartesiano (figura 10).

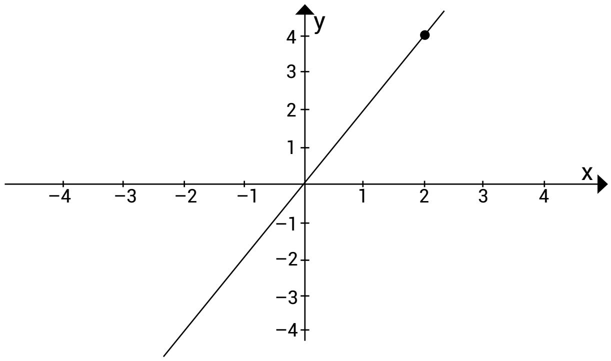


Figura 10. Gráfico da função linear f(x) = 2x e o ponto (x, y) = (2, 4).

A aplicação de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quando cada $x \in \mathbb{R}$ estiver associado ao elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, a e b constante real, recebe o nome de **função afim**, ou seja, $f(x) = ax + b$; $a \neq 0$, onde a é conhecido como coeficiente angular e b como coeficiente linear.

O gráfico para a função afim, f(x) = ax + b, também é uma reta, onde o coeficiente angular (a) indica a inclinação da reta e o coeficiente linear indica o local em que a reta corta o eixo das ordenadas (eixo y). Seja a função afim f(x) = 2x + 1, (x, y) = (0, 1) é o ponto onde a reta corta o eixo y; com mais um ponto, pode-se traçar a reta que representa a função f(x). Assim, para x = 1 → y = 3, ou seja, o ponto (x, y) = (1, 3). Seu gráfico segue na figura 11.

Importante!

Uma função afim f(x) = ax + b, quando b = 0, transforma-se na função linear f(x) = ax. Assim, dizemos que uma função linear é um caso particular da função afim.

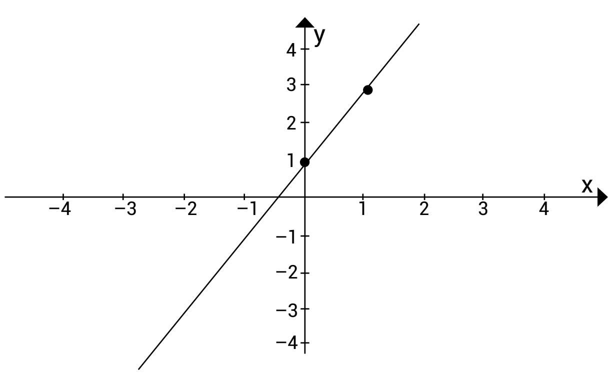


Figura 11. Gráfico da função afim f(x) = 2x + 1 e o ponto (x, y) = (1, 3)

Uma função afim é **crescente** sempre que o coeficiente angular for **positivo** (a > 0) e **decrescente** quando o mesmo for **negativo** (a < 0).

Sinal da Função Afim

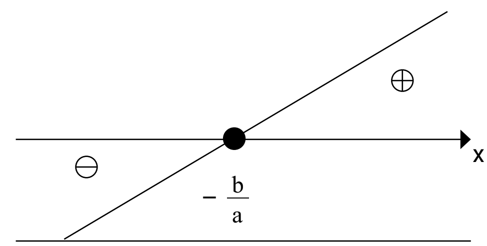
O estudo do sinal de uma função f: A → B definida por y = f(x) é encontrar para quais valores de x temos f(x) > 0, f(x) < 0 ou f(x) = 0, com $x \in D_f$.

Inicialmente, identificamos onde a função é igual a zero, ou seja, encontramos a raiz da função y = f(x). Para isso, fazemos y = f(x) = 0. Para função afim, temos a raiz sendo: $f(x) = ax + b = 0 \to x = -\frac{b}{a}$.

Agora, teremos dois casos para estudo do sinal da função afim: um quando o coeficiente angular é positivo (a > 0); outro, quando é negativo (a < 0):

- 1º caso: a > 0 (crescente)

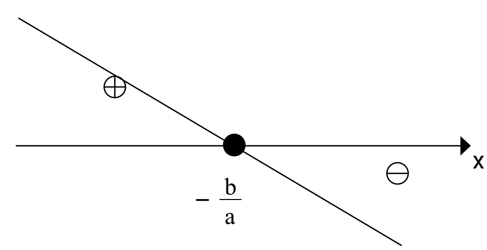
$$\begin{cases} f(x) = ax + b > 0 \to x > -\frac{b}{a} \\ f(x) = ax + b < 0 \to x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$



Assim, colocando esses resultados sobre o eixo x e adicionando os sinais, vemos em quais intervalos estão os sinais positivos e negativos da função.

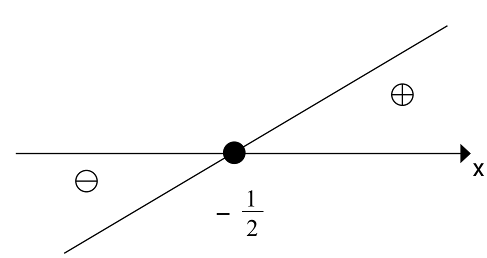
- 2º caso: a < 0 (decrescente)

$$\begin{cases} f(x) = ax + b > 0 \to x < -\frac{b}{a} \\ f(x) = ax + b < 0 \to x > -\frac{b}{a} \end{cases}$$



Vejamos o exemplo: na função f(x) = 2x + 1, sua raiz é dada por $2x + 1 = 0 \to x - \frac{1}{2} =$. Como o coeficiente angular é positivo (a = 2 > 0), então o estudo de sinal de f(x) será:

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{2} \to f(x) > 0 \\ x < -\frac{1}{2} \to f(x) < 0 \end{cases}$$



Inequações-Produto e Quociente para Função Afim

Sejam as funções f(x) e g(x) e , as **inequações-produto** delas são dadas por:

$$f(x) \cdot g(x) > 0 \text{ ou } f(x) \cdot g(x) < 0 \text{ ou } f(x) \cdot g(x) \geq 0 \text{ ou } f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

De acordo com a regra de sinais do produto de números reais, temos que *(+ · + = +); (– · – = +); (+ · – = –);* assim, um conjunto solução (S) para uma dessas inequações pode ser encontrado da seguinte forma: seja a inequação produto $f(x) \cdot g(x) > 0$, para o produto ser positivo temos duas situações: $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$.

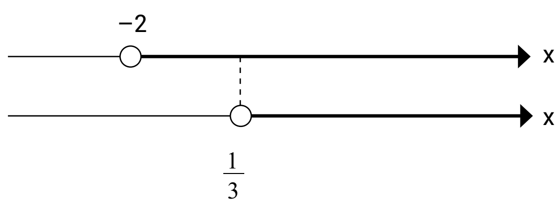
Assim, para $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ encontramos a solução S_1 para a $f(x) > 0$ e a solução S_2 para a $g(x) > 0$, chegando na solução geral $S_1 \cap S_2$.

Depois, para $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$, encontramos a solução S_3 para a $f(x) < 0$ e a solução S_4 para a $g(x) < 0$, chegando na solução geral $S_3 \cap S_4$.

Por fim, a solução para a inequação produto, $f(x) \cdot g(x) > 0$, é dada pela união das soluções anteriores, $S = \{S_1 \cap S_2\} \cup \{S_3 \cap S_4\}$. Raciocínio análogo para as outras inequações-produto.

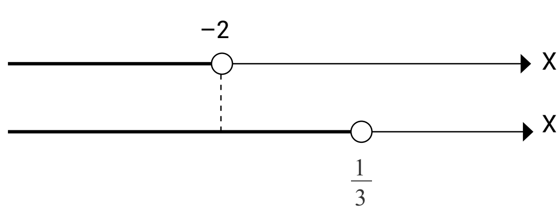
Tomemos como exemplo a inequação produto $(x + 2)(3x – 1) > 0$, ou seja, $f(x) \cdot g(x) > 0 \rightarrow f(x) = x + 2$ e $g(x) = 3x – 1$: seguindo os dois passos acima, temos:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \rightarrow x > -2 \\ 3x - 1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



Logo, a solução para esse primeiro caso é $S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{3}\}$.

$$\begin{cases} x + 2 < 0 \rightarrow x < -2 \\ 3x - 1 > 0 \rightarrow x < \frac{1}{3} \end{cases}$$



Logo, a solução para esse segundo caso é $S_3 \cap S_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$. Assim, o conjunto solução para a inequação-produto $(x + 2)(3x – 1) > 0$ é:

$$S = \{S_1 \cap S_2\} \cup \{S_3 \cap S_4\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{3}\}$$

Sejam as funções f(x) e g(x), as **inequações-quociente** delas são dadas por:

$$\frac{f(X)}{g(X)} > 0 \text{ ou } \frac{f(X)}{g(X)} < 0 \text{ ou } \frac{f(X)}{g(X)} \geq 0 \text{ ou } \frac{f(X)}{g(X)} \leq 0$$

De acordo com a regra de sinais do quociente de números reais, temos que (+ ÷ + = +); (– ÷ – = +); (+ ÷ – = –), e lembrando que o denominador da fração não pode ser nulo. Assim, um conjunto solução (S) para uma dessas inequações pode ser encontrado da seguinte forma: seja a inequação-quociente $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, para o produto ser positivo temos duas situações: $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) \leq 0$ e $g(x) < 0$.

Assim, para $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ encontramos a solução S_1 para a $f(x) \geq 0$ e a solução S_2 para a $g(x) > 0$, chegando na solução geral $S_1 \cap S_2$.

Depois, para $f(x) \leq 0$ e $g(x) < 0$, encontramos a solução S_3 para a $f(x) \leq 0$ e a solução S_4 para a $g(x) < 0$, chegando na solução geral $S_3 \cap S_4$.

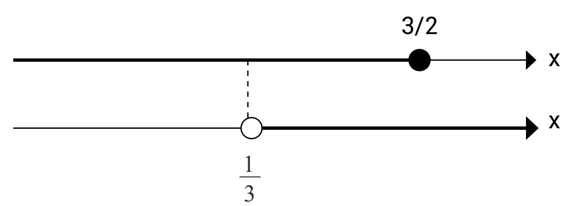
Por fim, a solução para a inequação-quociente $\frac{f(X)}{g(X)} \geq 0$ é dada pela união das soluções anteriores, $S = \{S_1 \cap S_2\} \cup \{S_3 \cap S_4\}$. Raciocínio análogo para as outras inequações-quociente.

Tomemos como exemplo a inequação-quociente $\frac{(x+2)}{(3x-1)} \geq 1$, ou seja, $\frac{(x+2)}{(3x-1)} \geq 1 \rightarrow \frac{(x+2)}{(3x-1)} - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{(-2x+3)}{(3x-1)} \geq 0$. Assim, temos:

$$\frac{f(X)}{g(X)} \geq 0 \rightarrow f(x) = -2x + 3 \text{ e } g(x) = 3x - 1$$

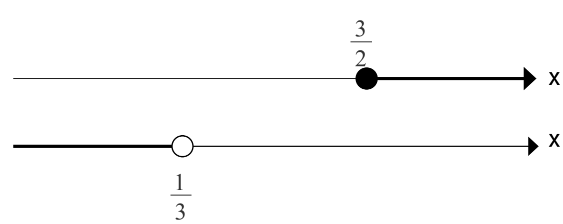
Seguindo os dois passos acima, temos:

$$\begin{cases} -2x + 3 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{3}{2} \\ 3x - 1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



Logo, a solução para esse primeiro caso é $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x \leq \frac{3}{2}\}$.

$$\begin{cases} -2x + 3 \leq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ 3x - 1 < 0 \rightarrow x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



Logo, a solução para esse segundo caso é $S_3 \cap S_4 = \{\emptyset\}$. Assim, o conjunto solução para a inequação-quociente $\frac{(x+2)}{(3x-1)} \geq 1$é:

$$S = \{S_1 \cap S_2\} \cup \{S_3 \cap S_4\} = \{x \in \Re \mid x < \frac{1}{3} < x \leq \frac{3}{2}\}$$

MATEMÁTICA

Quando se está trabalhando algebricamente com uma inequação, e no momento em que se tem a necessidade de multiplicar por –1 ambos os lados para isolar x, $(-1) \cdot -x \leq -\frac{3}{2} \cdot (-1)$, não esqueça de também inverter o sinal da inequação, ficando, nesse caso, $x \geq \frac{3}{2}$.

Funções Quadráticas

A **função quadrática, ou do 2º grau**, é uma aplicação de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quando cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$. Um exemplo de função quadrática: $f(x) = x^2 - 3x + 2$; $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$.

O gráfico para a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola. Assim, para sua construção são necessários mais que dois pontos, diferentemente do visto anteriormente na construção da reta. Para tal, inicialmente encontram-se os zeros ou as raízes da função, o vértice e o ponto de encontro com o eixo y.

São três coeficientes na função quadrática: a, b e c. O primeiro, (a), indica se a concavidade da parábola está **voltada para cima *(a > 0)*** ou **para baixo *(a < 0)***, já o terceiro, (c), indica onde a parábola corta o eixo das ordenadas (eixo y), ou seja, quando $x = 0$ e $y = c$.

Vamos analisar a função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$ para compreender melhor. Neste caso, $a = 1$, então a parábola terá sua concavidade voltada para cima; e $c = 2$ — a parábola cortará o eixo y nas coordenadas (0, 2). Mais à frente, estudaremos como calcular as raízes e os vértices da função para, assim, construir um gráfico tal como este:

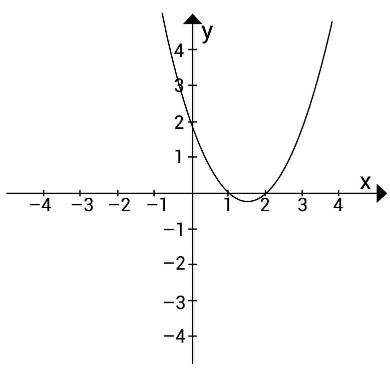


Figura 12. Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$ com vértice $(x_v, y_v) = \left(\frac{3}{2} \; - \frac{1}{4}\right)$ e raízes $(x_1, y) = (1, 0)$; $(x_2, y) = (2, 0)$.

As raízes ou zeros da função quadrática são os valores de x tal que a $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

Pela forma canônica, tem-se que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$ o discriminante, igualando essa função canônica a zero, chegamos nos valores das raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Usando essa fórmula, chegamos nas raízes da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1,$$

$$X_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 1}{2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

Assim, as raízes para a função quadrática são: $(x_1, y) = (1, 0)$; $(x_2, y) = (2, 0)$.

Importante!

Quando o valor de delta é negativo ($\Delta < 0$), não temos raízes reais, então a parábola não corta o eixo x. Quando o delta é igual a zero ($\Delta = 0$), as duas raízes são iguais, ou seja, teremos uma função quadrática de raiz unitária, fazendo com que a parábola encoste somente uma vez no eixo x. Já para delta positivo ($\Delta > 0$), teremos, então, a situação de duas raízes reais, onde a parábola corta o eixo x em dois lugares.

Sinal da Função Quadrática

O estudo do **sinal de uma função** $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é encontrar para quais valores de x temos $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$, com $x \in D_f$.

Inicialmente, identificamos onde a função é igual a zero, ou seja, encontramos a raiz da função $y = f(x)$. Para isto, fazemos $y = f(x) = 0$. Para função quadrática, vimos que as raízes são: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$.

Agora, teremos um caso para estudo do sinal da função quadrática quando o coeficiente a é positivo ($a > 0$), outro quando é negativo ($a < 0$) e outro, ainda, quando $\Delta > 0$; $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$.

Para $\Delta < 0$, temos:

$a > 0 \rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathfrak{R}$
$a < 0 \rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathfrak{R}$

No gráfico da função quadrática com $\Delta < 0$, como não existe raiz real, a parábola não corta o eixo x (abscissa).

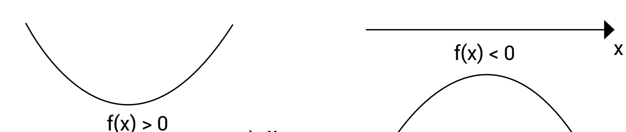


Figura 13.

Para $\Delta = 0$, temos:

$a > 0 \rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathfrak{R}$
$a < 0 \rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathfrak{R}$

No gráfico da função quadrática com $\Delta = 0$, as raízes são iguais (raiz unitária), logo a parábola corta o eixo x (abscissa) em apenas um ponto. Neste ponto, a $f(x) = 0$.

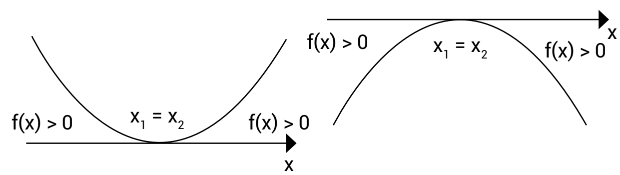


Figura 14.

Para $\Delta > 0$, temos:

$$a > 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \{x \in \Re \mid x < x_1 \text{ ou } x > x_2\} \\ f(x) < 0, \{x \in \Re \mid x_1 < x < x_2\} \end{cases}$$

$$a < 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \{x \in \Re \mid x_1 < x < x_2\} \\ f(x) < 0, \{x \in \Re \mid x < x_1 \text{ ou } x > x_2\} \end{cases}$$

No gráfico da função quadrática com $\Delta > 0$, existem as duas raízes reais, logo a parábola corta o eixo x (abscissa) em dois pontos. Nestes pontos, a $f(x) = 0$.

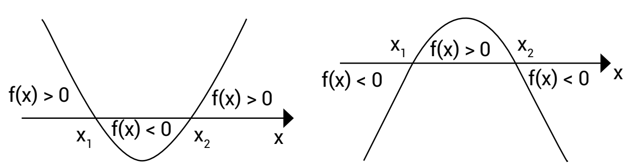


Figura 15.

Logo, no estudo do sinal da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$, temos que $a > 0$, já que $a = 1$, e calculamos o valor do delta, $\Delta = 1 > 0$, e das raízes, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Assim, concluímos para o estudo de sinal:

$$a > 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \{x \in \Re \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\} \\ f(x) < 0, \{x \in \Re \mid 1 < x < 2\} \end{cases}$$

Inequações para Função Quadrática

Seja $a \neq 0$ as **inequações quadráticas** são: $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$.

Resolver a inequação $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ significa encontrar valores de x tal que $f(x)$ seja positiva. O resultado para resolver essa inequação é encontrado no estudo de sinal da função $f(x)$. Assim dependendo dos valores de a e de delta temos algumas combinações de resultados para solução da $f(x) > 0$:

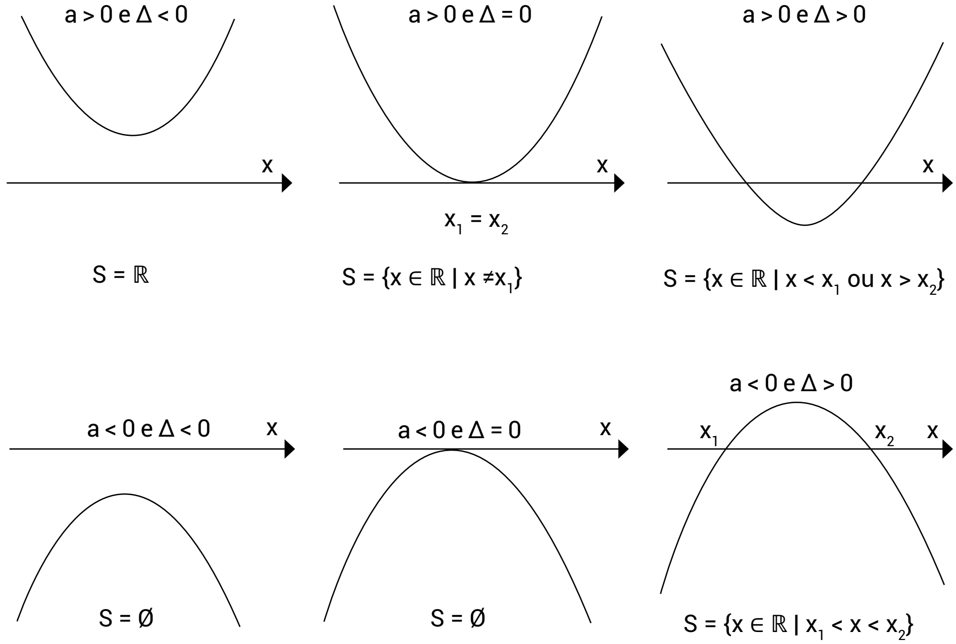


Figura 16.

No caso de **inequação produto** faz-se o estudo de sinal de cada uma das funções quadráticas e define-se a solução de acordo com a regra de sinais do produto de números reais, temos que (+ · + = +); (– · – = +); (+ · – = –), assim, um conjunto solução (S) para uma dessas inequações pode ser encontrada da seguinte forma, seja a inequação produto $f(x)\cdot g(x) > 0$, para o produto ser positivo temos duas situações: $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) <$ e $g(x) < 0$.

Então seja a inequação produto $(x^2 - x - 6)\cdot(-x^2 + 2x - 1) > 0$, para achar o conjunto solução primeiro encontra-se as raízes de cada função $f(x) = x^2 - x - 6$ e $g(x) = -x^2 + 2x - 1$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \begin{cases} \Delta_f = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 \\ \Delta_g = (2)^2 - 4(-1)(-1) = 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{25}}{2\cdot 1} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-(-1) + \sqrt{25}}{2\cdot 1} = 3 \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \begin{cases} x_1 = x_2 = \dfrac{-(2) \pm \sqrt{0}}{2\cdot(-1)} = 1 \end{cases}$$

Para $f(x) = x^2 - x - 6$, com $\Delta > 0$ e $a > 0$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\} \\ f(x) < 0, \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\} \end{cases}$$

Para $g(x) = -x^2 + 2x - 1$, com $\Delta = 0$ e $a < 0$:

$$g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, para a inequação produto ser positiva, $f(x)\cdot g(x) = (x^2 - x - 6)\cdot(-x^2 + 2x - 1) > 0$, sabendo que $g(x) < 0$, então a f também deve ser negativa, $f(x) < 0$. Assim, a solução será $S = \{x \in \Re \mid -2 < x < 3\}$

No caso de **inequação quociente** faz-se o estudo de sinal de cada uma das funções quadráticas e define-se como solução de acordo com a regra de sinais do quociente de números reais, temos que (+ ÷ + = +);(– ÷ – = +);(+ ÷ – = –), assim, um conjunto solução (S) para uma dessas inequações pode ser encontrada da seguinte forma, seja a inequação quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$, para o quociente ser positivo temos duas situações: $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$.

Então seja a inequação quociente $\dfrac{(2x^2 + x - 1)}{(-x^2 + 2x)} < 0$, para achar o conjunto solução primeiro encontra-se as raízes de cada função $f(x) = 2x^2 + x - 1$ e $g(x) = -x^2 + 2x$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \begin{cases} \Delta_f = (1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9 \\ \Delta_g = (2)^2 - 4(-1)(0) = 4 - 0 = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-(1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \begin{cases} x_1 = \dfrac{-(2) - \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-(2) + \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = 0 \end{cases}$$

- Para $f(x) = 2x^2 + x - 1$, com $\Delta > 0$ e $a > 0$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \left\{ x \in \Re \mid x < -1 \text{ ou } x > \dfrac{1}{2} \right\} \\ f(x) < 0, \left\{ x \in \Re \mid -1 < x < \dfrac{1}{2} \right\} \end{cases}$$

- Para $g(x) = -x^2 + 2x$, com $\Delta > 0$ e $a < 0$:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \{x \in \Re \mid 0 < x < 2\} \\ g(x) < 0, \{x \in \Re \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\} \end{cases}$$

Portanto, para a inequação quociente ser negativa, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(2x^2 + x - 1)}{(-x^2 + 2x)} > 0$, temos duas situações, a primeira com $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$. Assim, a solução será:

$$S_1 = \{x \in \Re \mid x < -1 \text{ ou } x > \tfrac{1}{2}\} \cap \{x \in \Re \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\} = \{x \in \Re \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$$

A segunda para $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$. Assim, a solução será:

$$S_2 = \{x \in \Re \mid -1 < x < \tfrac{1}{2}\} \cap \{x \in \Re \mid 0 < x < 2\} = \{x \in \Re \mid 0 < x < \tfrac{1}{2}\}$$

Logo, a solução das inequações quociente $\dfrac{(2x^2 + x - 1)}{(-x^2 + 2x)}$ é:

$$S_1 \cup S_2 = \{x \in \Re \mid x < -1 \text{ ou } 0 < x < \tfrac{1}{2} \text{ ou } x > 2\}$$

Máximo e Mínimo para Função Quadrática

Dizemos que o número $y_M \in Im(f)$ é o valor **máximo** ou **mínimo** da função $y = f(x)$ se, somente se, $y_M \geq y$ ou $y_M \leq y$, respectivamente. Ao valor $x_M \in D_f$ tal que $y_M = f(x_M)$ chamamos de ponto máximo ou mínimo da função. Esse ponto também é conhecido como **vértice da função quadrática** ou da parábola. Denotamos o vértice como:

$$(x_M, y_M) = V(x_v, y_v) = V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

Ou seja, $V_x = \dfrac{-b}{2a}$ e $V_y = \dfrac{-\Delta}{4a}$

Para a função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$, o vértice é dado por:

$$V(x_v, y_v) = V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-(-3)}{2 \cdot 1}, \frac{-((-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2)}{4 \cdot 1}\right) = V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Sendo $a = 1 > 0$, então a concavidade da parábola está voltada para cima e o vértice será ponto de mínimo da função.

Importante!

O vértice de uma função quadrática será ponto de **máximo** da função quando $a < 0$ e ponto de **mínimo** da função quando $a > 0$.

MODULAR

Definição, Gráfico, Domínio e Imagem

Uma função *f:* ℝ→ℝ definida pela associação de cada *x* ∈ ℝ *af(x)* = |*x*| ∈ ℝ é denominada **função modular**.

Considerando a definição de módulo de um número real, em que para um número x tem-se $|x| = x$, se $x \geq 0$ ou $|x| = -x$, se $x < 0$, podemos descrever a função modular também da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico para a função modular $f(x) = |x|$ é definido pela junção dos dois gráficos da função de duas sentenças (x e –x) e resultará em duas semirretas de origem na raiz da função, (x, y) = (0, 0), ou seja, essas retas são bissetrizes dos primeiro e segundo quadrantes do plano (figura 17).

O domínio da função modular é o conjunto dos reais, ou seja, para todo ℝ, existe um único $y \in Im(f)$, sendo que a imagem da função assume somente valores positivos (reais não negativos ($\mathbb{R}_+$)). Logo, $Im(f) = \Re_+$. Note, que no gráfico da função as retas ficam acima do eixo x, em que todos os valores para y são positivos (figura 17).

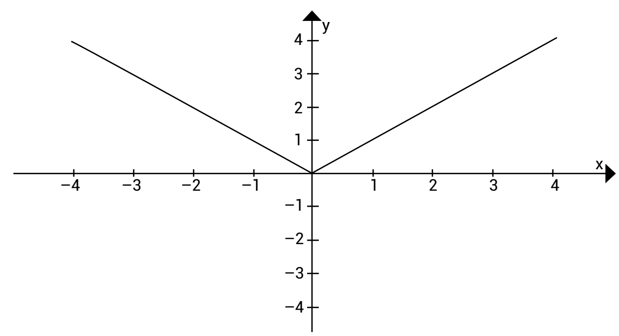


Figura 17. Gráfico da Função modular f(x) = |x|.

Para funções modulares com potência quadrática como $f(x) = |x^2 + 4x|$, primeiro divida a função modular em funções definidas por duas sentenças:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x \\ -(x^2 + 4x) \end{cases}$$

A essas duas funções encontramos as suas raízes:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 16$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-(4) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -4 \\ x_2 = \dfrac{-(4) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 0 \end{cases}$$

As raízes são –4 e 0, como para a primeira sentença o valor de $a > 0$, então a concavidade é voltada para cima, e na segunda sentença o valor de $a < 0$, ou seja, concavidade voltada para baixo. Logo, a solução positiva para a função nas duas sentenças segue o intervalo de x abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x,\ x \le -4 \text{ e } x \ge 0 \\ -x^2 - 4x,\ -4 < x < 0 \end{cases}$$

Dessa forma construímos o gráfico para $x^2 + 4x$ no intervalo abaixo de –4 e acima de 0 e para $-x^2 - 4x$ no intervalo entre –4 e 0 (figura 18).

As raízes das sentenças definidas pela função modular podem também ser chamadas de **ponto (s) de inflexão** da curva (funções quadráticas) ou da reta (funções lineares ou Afim). Inflexão é um ponto sobre uma curva na qual a curvatura troca o sinal, nesse caso indo para o lado positivo do eixo *y*, pois, $Im(f) = \mathfrak{R}_+$.

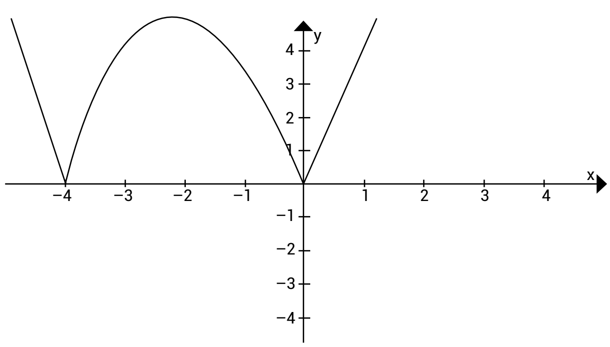


Figura 18. Gráfico da Função Modular $f(x) = |x^2 + 4x|$.

Equações Modulares

Lembrando da definição de módulo de um número real, em que para um número $k > 0$ tem-se $|x| = k \Leftrightarrow x = k$ ou $x = -k$. Então a solução da **equação modular** $|x+2| = 3$ é:

$$|x + 2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3 \rightarrow x = 1 \\ x + 2 = -3 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

$$S = \{-5, 1\}$$

Caso tenhamos duas funções modulares, como a equação $|3x + 2| = |x - 1|$, a solução é dada da seguinte forma:

$$|3x + 2| = |x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 = x - 1 \rightarrow x = -\dfrac{3}{2} \\ 3x + 2 = -x + 1 \rightarrow x = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$S = \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$$

E na situação de uma função modular, como a equação $|3x + 2| = 2x - 3$, a solução é válida para valores de x tal que $2x - 3 \ge 0 \rightarrow x \ge \frac{3}{2}$. A solução da equação é dada por:

$$|3x + 2| = 2x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 = 2x - 3 \rightarrow x = -5 \\ 3x + 2 = -2x + 3 \rightarrow x = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Como a solução só é válida para valores de $x \ge \frac{3}{2}$, então a solução para $|3x + 2| = 2x - 3$ é $S = \{\emptyset\}$.

Inequações Modulares

Uma das propriedades de módulo para números reais, em que para um número $k > 0$ tem-se $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$ e $|x| > k \Leftrightarrow x < -k$ ou $x > k$. Com essa propriedade podemos resolver **inequações modulares** como $|3x - 2| < 4$ e sua solução é:

$$|3x - 2| < 4 \Leftrightarrow -4 < 3x - 2 < 4 \rightarrow -2 < 3x < 6 \rightarrow -\frac{2}{3} < x < 2$$

$$S = \{x \in \mathfrak{R} \mid -\frac{2}{3} < x < 2\}$$

Mas se a inequação for $|5x + 4| \ge 4$, a solução é:

$$|5x + 4| \ge 4 \Leftrightarrow 5x + 4 \le -4 \text{ ou } 5x + 4 \ge 4 \Leftrightarrow 5x \le -8 \text{ ou } 5x \ge 0 \Leftrightarrow x \le -\frac{8}{5} \text{ ou } x \ge 0$$

$$S = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \le -\frac{8}{5} \text{ ou } x \ge 0\}$$

Para a inequação $|x + 1| + 2x - 7 \ge 0$ temos:

$$|x + 1| + 2x - 7 \ge 0 \rightarrow |x + 1| \ge 7 - 2x$$

$$|x + 1| + = \begin{cases} x + 1, \text{ se } & x \ge -1 \\ -x - 1, \text{ se } & x < -1 \end{cases}$$

Para $x \ge -1$ temos $x + 1 \ge 7 - 2x \Leftrightarrow x \ge 2$, com solução:

$$S1 = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \ge -1\} \cap \{x \in \mathfrak{R} \mid x \ge 2\} = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \ge 2\}$$