Escola Preparatória de Cadetes do Ar

EPCAR

Cadetes do Ar

NV-020JN-24-EPCAR-CADETES

NOVA CONCURSOS

SUMÁRIO

MATEMÁTICA

NOÇÕES DE CONJUNTOS

A **Teoria de Conjuntos** deve ser vista como **um dos tópicos mais importantes** da Matemática Contemporânea.

É ela que dá **sustentação lógica** a outros tópicos inerentes à Matemática, como por exemplo: Funções, Probabilidade, Análise Combinatória, Polinômios, Progressões (Aritméticas e Geométricas) etc.

Acreditar nos alicerces estabelecidos por essa Teoria é ter a **garantia** de que o rigor matemático, a coesão e a elegância na exposição do conteúdo terão seu lugar de destaque garantidos.

NOÇÕES PRIMITIVAS

No contexto da Teoria de Conjuntos, **três noções primitivas** são aceitas sem definição e, portanto, não necessitam de demonstração. São elas:

- conjunto;
- elemento;
- pertinência entre Conjunto e Elemento.

Os **Conjuntos** (ou coleções) devem ser representados por letras latinas maiúsculas: *A, B, C* etc.

Alguns exemplos de Conjuntos:

- M = {*janeiro, março, maio, julho, agosto, outubro, dezembro}* é o conjunto dos meses do ano que possuem 31 dias;
- P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} é o conjunto dos números primos até 19;
- N = {*Estados Unidos, Canadá, México}* é o conjunto dos países da América do Norte.

Os **Elementos** referem-se aos objetos inerentes aos Conjuntos. Nos exemplos acima, cada um dos componentes dos Conjuntos apresentados são elementos destes (por exemplo, no conjunto dos números primos, cada número ali destacado representa um elemento desse conjunto).

A **Relação de Pertinência** entre Conjunto e Elemento estabelece a identificação entre eles. Para tanto, utilizamos os símbolos $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence).

Nos exemplos citados temos algumas situações para destacar essa relação:

- o mês de abril não pertence ao conjunto *M*, ou simbolicamente, Abril $\notin$ M;
- o número 11 pertence ao conjunto *P*, ou simbolicamente, 11 $\in$ P;
- o Haiti não pertence ao conjunto *N*, ou simbolicamente, Haiti $\notin$ N.

REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTOS

Existem três maneiras distintas de se presentar Conjuntos:

- analítica;
- sintética;
- Diagrama de Euler-Venn (ou simplesmente Diagrama).

Na representação **Analítica,** destaca-se cada um dos elementos que pertencem a um determinado conjunto. Nos exemplos mencionados (conjuntos *M, P* e *N*), todos eles foram representados dessa maneira.

Na representação **Sintética,** devemos destacar uma característica que seja comum a todos os elementos pertencentes a um conjunto qualquer. Nos exemplos citados, essa representação ficaria da seguinte maneira (abaixo, lê-se *x/x* como *"x é tal que x tem a propriedade*"):

- M = {x / x é mês do ano com 31 dias};
- P = {x / x é número primo};
- N = {x / x é país da América do Norte}.

Na representação por **Diagramas,** devemos definir uma região (normalmente um círculo) onde devem ser representados todos os elementos pertencentes ao conjunto. Importante não esquecer de nomear esse conjunto.

Observe as situações abaixo (já apresentados anteriormente) que são exemplos dessa representação:

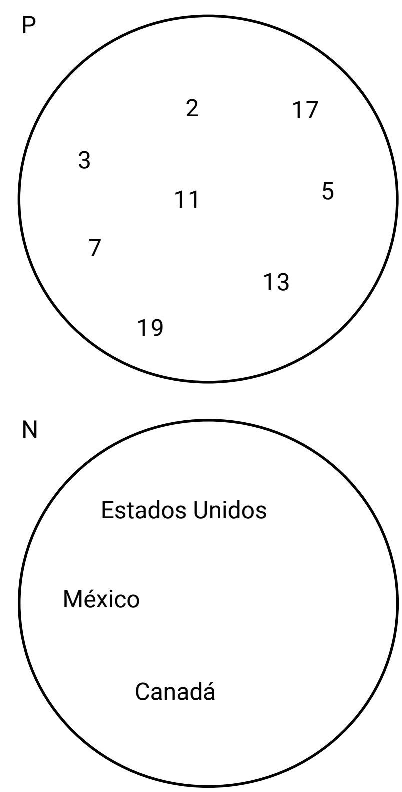


Figura 1. Representação de conjuntos por diagramas

CONJUNTO UNITÁRIO

Um determinado conjunto recebe o nome de **Conjunto Unitário** quando ele apresentar exatamente um único elemento (ou objeto).

São **exemplos** de Conjuntos Unitários:

- H = {1986} é o conjunto formado pelo ano do Século XX em que o Cometa Halley pôde ser visto por quem estava na Terra. Observe que esse conjunto apresenta somente um único elemento, ou seja, 1986;
- F = {Michael Phelps} é o conjunto formado pelo esportista que mais ganhou medalhas olímpicas. Observe que esse conjunto apresenta somente um

único elemento, ou seja, ele é composto pelo medalhista Norte-Americano Michael Phelps (ganhador de 28 medalhas olímpicas, em um total de 4 Olímpiadas que participou);
- Conjunto dos números primos pares. A esse conjunto pertence somente o número 2.

CONJUNTO VAZIO

Um determinado conjunto recebe o nome de **Conjunto Vazio** quando ele não apresentar elemento (ou objeto) algum. A notação utilizada para representar um Conjunto Vazio é: {} ou ∅

Importante!

É muito comum as pessoas representarem o Conjunto Vazio da seguinte maneira: {∅}
Na verdade, o que se tem aí é um conjunto que possui um único elemento que é o conjunto vazio.
Complicado?
O importante é não cometer esse erro de forma alguma: utilize {} ou ∅ e nunca as duas representações ao mesmo tempo!

São **exemplos** de Conjuntos Vazios:

- conjunto dos meses que apresentam 32 dias;
- países que fazem parte da América do Norte e que começam com a letra W;
- número primo irracional;
- Seleção de Futebol que tenha conquistado 10 Copas do Mundo.

CONJUNTO UNIVERSO

Um determinado conjunto recebe o nome de **Conjunto Universo** quando a ele pertencem todos os elementos.

Como exemplo de conjunto universo, considere a seguinte situação: se fôssemos escolher um aluno qualquer do 1º ano B do Ensino Médio de uma Escola que apresentasse uma determinada característica (como por exemplo o uso de óculos de grau), nosso Conjunto Universo poderia ser representado pela Turma ao qual o aluno pertence (no caso o 1º ano B), ou ainda a Escola em que ele estuda.

Perceba que ,nesse caso, dá para escolher mais de um conjunto Universo,isto é, você poderá escolher o Conjunto Universo ao qual pertencem todos os elementos que são de seu interesse e, dentre eles, selecionar aqueles que apresentam a característica procurada (ou de interesse).

IGUALDADE DE CONJUNTOS

Dois conjuntos A e B são **iguais** quando todo elemento de A pertence a B e vice-versa.

A **notação** (mais rigorosa e carregada de símbolos) utilizada neste contexto é a seguinte: $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ (lê-se: *A é igual a B, se, e somente se, qualquer que seja x, x pertence a A se, e somente se, x pertence a B*).

Duas observações são bastante importantes e impactam diretamente na compreensão de outros conteúdos que dependem de Teoria de Conjuntos:

- A **ordem** na Teoria de Conjuntos não importa (não interfere)! Observe o conjunto A = {1, 2, 3, 4}. Se trocarmos a ordem dos elementos desse conjunto, como por exemplo {3, 1, 4, 2}, ele continua recebendo o nome de *A,* pois apresenta os mesmos elementos (mesmo estando estes em ordem distinta daquela apresentada inicialmente). Portanto, variações do conjunto *A* (outras possíveis são: {1, 3, 4, 2}, {4, 3, 1, 2}, {2, 3, 4, 1} etc.), no que tange à ordem dos elementos, não interferem em sua nomeação;
- A **repetição** na Teoria de Conjuntos não importa (não interfere)! Observe o mesmo conjunto A = {1, 2, 3, 4]. Se repetirmos os elementos desse conjunto, como por exemplo {2, 2, 3, 4, 4, 1, 1, 1}, ele continua recebendo o nome de *A,* pois apresenta os mesmos elementos (mesmo estando estes repetidos). Cabe destacar que, nesse caso, a quantidade de elementos continua sendo a mesma, ou seja, 4 elementos pertencem ao conjunto *A*. Portanto, variações do conjunto *A* (outras possíveis são: {1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4}, {1, 2, 3, 3, 3, 4}, {4, 4, 2, 2, 3, 1, 4} etc.), no que tange à repetição dos elementos, não interferem em sua nomeação.

SUBCONJUNTOS

Um conjunto A é **Subconjunto** de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B.

A **notação** (mais rigorosa e carregada de símbolos) utilizada neste contexto é a seguinte: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ (lê-se: *A está contido em B, se, e somente se, qualquer que seja x, x pertence a A, então x pertence a B*).

Por **diagramas,** poderíamos representar esta situação da seguinte maneira:

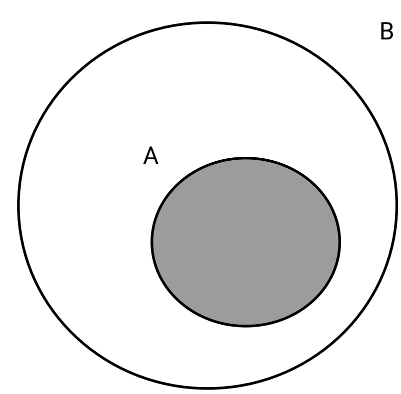


Figura 2. Subconjunto A do conjunto B

Perceba que todo elemento pertencente ao conjunto *A* (no interior da região verde), automaticamente, pertence também a *B*.

É desta maneira que representamos por Diagramas a relação de inclusão: $A \subset B$. Concluímos que *A* é subconjunto de *B*.

Diferentemente do que acontece quando relacionamos elementos com conjuntos –situação na qual vigoram as relações de pertinência, ou seja, somente utilizamos ∈ (pertence) ou ∉ (não pertence)–, quando tratamos da **relação entre conjuntos**, utilizamos os símbolos abaixo:

- $\subset$ (está contido) ou;
- $\not\subset$ (não está contido) ou;
- $\supset$ (contém) ou;
- $\not\supset$ (não contém).

Dá-se o nome de **Subconjunto Impróprio** de *B* à seguinte situação:

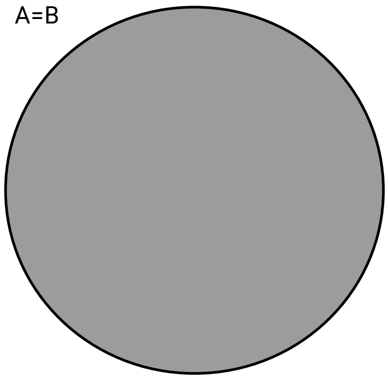


Figura 3. Subconjunto Impróprio de B

A **notação** (mais rigorosa e carregada de símbolos) utilizada neste contexto é a seguinte: $A = B \Leftrightarrow (A \subset B$ e $B \subset A)$ (lê-se: *A é igual a B, se, e somente se, A está contido em B e B está contido em A*).

Duas propriedades são bastante importantes e impactam diretamente na compreensão de outros conteúdos que dependem de Teoria de Conjuntos:

- **O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto**! Representamos tal situação da seguinte maneira: $\emptyset \subset A$. Essa propriedade é de extrema relevância para a simplificação de demonstrações de Teoremas. Sem ela, diversas situações envolvendo conjuntos teriam suas "comprovações" apresentadas de uma maneira muito mais extenuante (cansativa)!;
- **Todo conjunto está contido em si mesmo**! Representamos essa situação da seguinte maneira: $A \subset A$. Esta propriedade tem lugar de destaque no contexto da Teoria de Conjuntos e é extremamente útil no que se refere à simplificação de demonstrações de Teoremas. Ela também recebe o nome de Propriedade Reflexiva.

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS: INTERSEÇÃO E REUNIÃO

Interseção De Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **Interseção** de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B (conjunção lógica).

A **notação** (mais rigorosa e carregada de símbolos) utilizada neste contexto é a seguinte: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A$ e $x \in B\}$ (lê-se: os elementos do conjunto *A interseção com B são representados por x, tal que x pertence a A e x pertence a B*).

Por **diagramas**, poderíamos representar essa situação da seguinte maneira:

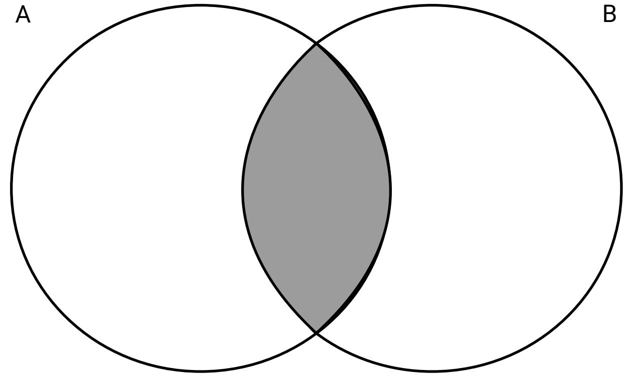


Figura 8. Interseção dos conjuntos A e B

Perceba que os elementos pertencentes ao conjunto $A \cap B$ (*A interseção com B*) são aqueles que pertencem a *A* e *B* simultaneamente.

É dessa maneira que representamos por Diagramas a relação de conjunção lógica $A \cap B$.

Dica

Existe uma diferença entre **Conjuntos Disjuntos** (interseção vazia) e **Conjuntos Intersecantes** (interseção não vazia).
Anteriormente, por diagramas, representamos dois conjuntos A e B Intersecantes. Veja na figura abaixo como devemos representar Conjuntos Disjuntos.

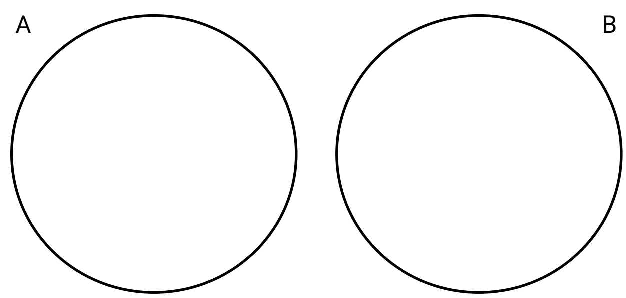


Figura 9. Conjuntos A e B disjuntos

Apresentadas as operações de União e interseção entre dois ou mais conjuntos (isso mesmo! É possível expandir o que aprendemos nestes dois últimos tópicos para 3 ou 4 conjuntos por exemplo) um princípio é de extrema importância para não contabilizarmos a mais a quantidade de elementos de um conjunto qualquer. Trata-se do **Princípio da Inclusão-Exclusão** cuja notação (mais rigorosa e carregada de símbolos) é a seguinte: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (lê-se: *o número de elementos do conjunto A união com B é dado pelo número de elementos de A, somado com o número de elementos de B, menos o número de elementos de A interseção com B*).

Observe as seguintes passagens para constatar a veracidade do Princípio:

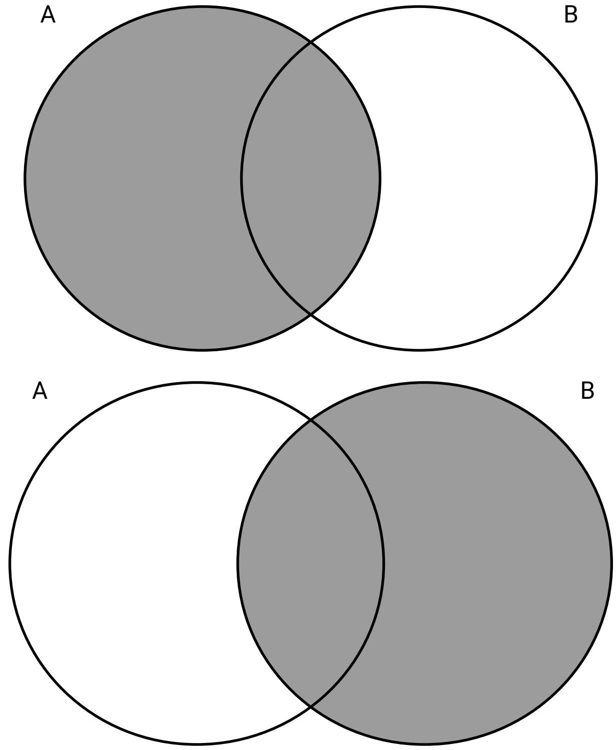


Figura 10. Interseção em relação ao Princípio da Inclusão-Exclusão

Observe que, ao representarmos na figura (à esquerda) o conjunto A, automaticamente a interseção de A com B ($A \cap B$) foi adicionada, pois ela está contida em A (($A \cap B) \subset A$). O mesmo ocorre em relação ao conjunto B: automaticamente a interseção de A com B ($A \cap B$) foi adicionada (figura à direita), pois ela está contida em B (($A \cap B) \subset B$). Portanto, **temos que eliminar a interseção uma vez** (correspondente ao termo n($A \cap B$) no Princípio da Inclusão-Exclusão), para que a contagem não seja excedida.

União ou Reunião de Conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **União** de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B (disjunção lógica).

A **notação** (mais rigorosa e carregada de símbolos) utilizada neste contexto é a seguinte: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ou $x \in B\}$ (lê-se: os elementos do conjunto *A união com B são representados por x, tal que x pertence a A ou x pertence a B*).

Por **diagramas,** poderíamos representar esta situação da seguinte maneira:

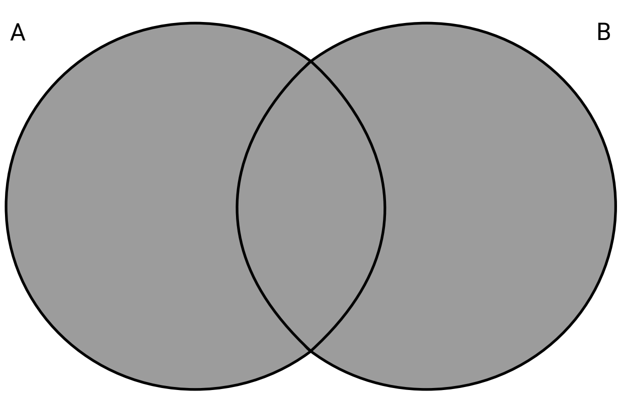


Figura 7. União dos conjuntos A e B

Perceba que os elementos pertencentes ao conjunto $A \cup B$ (*A união com B*) são aqueles que pertencem exclusivamente a A, unidos com aqueles que pertencem exclusivamente a B, unidos com aqueles que pertencem à interseção (como veremos em seguida).

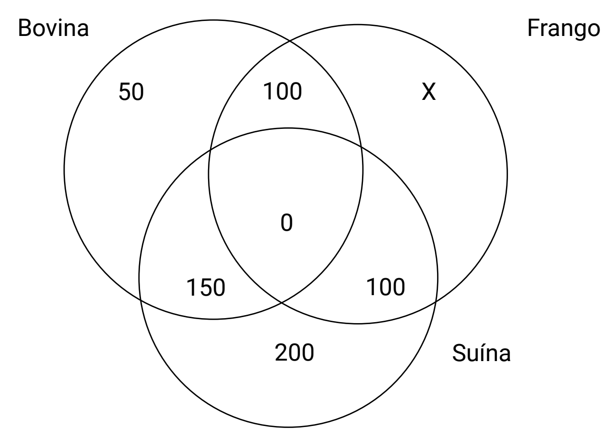
É dessa maneira que representamos por Diagramas a relação de disjunção lógica $A \cup B$.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1. (CEBRASPE-CESPE — 2018) Determinado porto recebeu um grande carregamento de frango congelado, carne suína congelada e carne bovina congelada, para exportação. Esses produtos foram distribuídos em 800 contêineres, da seguinte forma: nenhum contêiner foi carregado com os três produtos; 300 contêineres foram carregados com carne bovina; 450, com carne suína; 100, com frango e carne bovina; 150, com carne suína e carne bovina; 100, com frango e carne suína.
Nessa situação hipotética,
250 contêineres foram carregados somente com carne suína.

( ) CERTO ( ) ERRADO

Vamos extrair as informações e colocar dentro dos diagramas:
800 contêineres distribuição;
0 contêineres com os 3 produtos;
300 contêineres carne bovina;
450 contêineres carne suína;
100 contêineres com frango e carne bovina;
150 contêineres com carne suína e carne bovina;
100 contêineres com frango e carne suína.

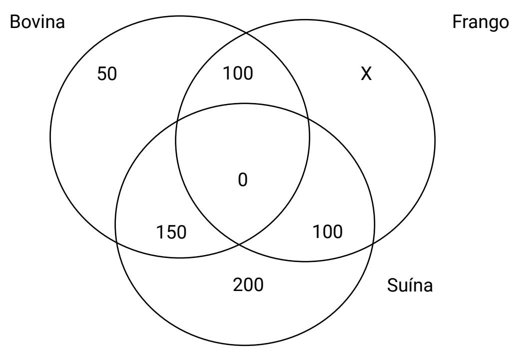


Veja que apenas 200 contêineres foram carregados somente com carne suína. Resposta: Errado.

2. (CEBRASPE-CESPE — 2018) Determinado porto recebeu um grande carregamento de frango congelado, carne suína congelada e carne bovina congelada, para exportação. Esses produtos foram distribuídos em 800 contêineres, da seguinte forma: nenhum contêiner foi carregado com os três produtos; 300 contêineres foram carregados com carne bovina; 450, com carne suína; 100, com frango e carne bovina; 150, com carne suína e carne bovina; 100, com frango e carne suína.
Nessa situação hipotética,
50 contêineres foram carregados somente com carne bovina.

( ) CERTO ( ) ERRADO

Vamos extrair as informações e colocar dentro dos diagramas:
800 contêineres distribuição;
0 contêineres com os 3 produtos;
300 contêineres carne bovina;
450 contêineres carne suína;
100 contêineres com frango e carne bovina;
150 contêineres com carne suína e carne bovina;
100 contêineres com frango e carne suína.



Veja que exatamente 50 contêineres foram carregados somente com carne bovina. Resposta: Certo.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Dica

O símbolo do conjunto dos **números naturais é a letra N** e podemos ter ainda, o **símbolo N***, que representa os números **naturais positivos, isto é, excluindo o zero.**

Conceitos básicos relacionados aos números naturais:

- Sucessor: é o próximo número natural.

Exemplo: o sucessor de 4 é 5, e o sucessor de 51 é 52. E o sucessor do número “n” é o número “n+1”.

- Antecessor: é o número natural anterior.

Exemplo: o antecessor de 8 é 7, e o antecessor de 77 é 76. E o antecessor do número “n” é o número “n-1”.

- Números consecutivos: são números em sequência.

Exemplo: 5, 6, 7 são números consecutivos, porém 10, 9, 11 não são. Assim, (n-1, n e n+1) são números consecutivos.

- Números naturais pares: são aqueles que, ao serem divididos por 2, não deixam resto. Por isso o zero também é par. Logo, todos os números que terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8 são pares.
- Números naturais ímpares: ao serem divididos por 2, deixam resto 1. Todos os números que terminam em 1, 3, 5, 7 ou 9 são ímpares.

Propriedades e Operações

A soma ou subtração de dois números pares tem resultado par.

Ex.: $12 + 8 = 20$; $12 - 8 = 4$.

A soma ou subtração de dois números ímpares tem resultado par.

Ex.: $13 + 7 = 20$; $13 - 7 = 6$.

A soma ou subtração de um número par com outro ímpar tem resultado ímpar.

Ex.: $14 + 5 = 19$; $14 - 5 = 9$.

A multiplicação de números pares tem resultado par.

Ex.: $8 \cdot 6 = 48$.

A multiplicação de números ímpares tem resultado ímpar:

Ex.: $3 \cdot 7 = 21$.

A multiplicação de um número par por um número ímpar tem resultado par:

Ex.: $4 \cdot 5 = 20$.

NÚMEROS PRIMOS E COMPOSTOS

Um número natural é definido como primo se tiver exatamente dois divisores: o número 1 e ele mesmo. Já nos inteiros, $p \in Z$ é um primo se ele tem exatamente quatro divisores: ± 1 e $\pm p$.

Por definição, 0, 1 e – 1 não são números primos.

Existem infinitos números primos, como demonstrado por Euclides por volta de 300 a.C. A propriedade de ser um primo é chamada “primalidade”, e a palavra “primo” é utilizada como substantivo ou adjetivo. Como 2 é o único número primo par, o termo “primo ímpar” refere-se a todo primo maior do que dois.

O conceito de número primo é muito importante na teoria dos números. Um dos resultados da teoria dos números é o *Teorema Fundamental da Aritmética*, que afirma que qualquer número natural diferente de 1 pode ser escrito de forma única (desconsiderando a ordem) como um produto de números primos (chamados fatores primos). Esse processo chama-se decomposição em fatores primos (fatoração). É exatamente esse conceito que utilizaremos no MDC e MMC.

Para caráter de memorização, seguem os 100 primeiros números primos positivos. Recomenda-se que se memorize ao menos os 10 primeiros para MDC e MMC:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541.

Os números compostos, por sua vez, são opostos aos números primos, ou seja, números compostos são números com mais de dois divisores naturais distintos, como por exemplo o 9, que é divisível por 1, por 3 e por 9, totalizando 3 divisores naturais.

DIVISIBILIDADE, DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS

No tópico anterior foram apresentados os números primos, agora vamos utilizar deles para fazer o que denomina-se decomposição, isto é, escrever um