Marinha do Brasil

MARINHA

Soldado Fuzileiro Naval

NV-003JN-24-MARINHA-FUZILEIRO-NAVAL

NOVA
CONCURSOS

SUMÁRIO

MATEMÁTICA

NÚMEROS REAIS

O CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Os números construídos com os algarismos de 0 a 9 são chamados de naturais. O símbolo desse conjunto é a letra N, e podemos escrever os seus elementos entre chaves: N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...}.

Os três pontos, conhecidos como reticências, indicam que este conjunto tem infinitos números naturais.

O zero não é um número natural propriamente dito, pois não é um número de "contagem natural". Utiliza-se o símbolo N* para designar os números naturais positivos (excluindo o zero). Veja: N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...}.

IMPORTANTE!

O símbolo do conjunto dos números naturais é a letra N, e podemos ter ainda o símbolo N*, que representa os números naturais positivos, isto é, excluindo o zero.

Conceitos básicos relacionados aos números naturais:

- **Sucessor:** é o próximo número natural.
  - **Exemplo:** o sucessor de 4 é 5, e o sucessor de 51 é 52. Ou seja, o sucessor do número "n" é o número "n + 1";
- **Antecessor:** é o número natural anterior.
  - **Exemplo:** o antecessor de 8 é 7, e o antecessor de 77 é 76. Ou seja, o antecessor do número "n" é o número "n – 1";
- **Números consecutivos:** são números em sequência;
  - **Exemplo:** 5, 6, 7 são números consecutivos, porém 10, 9, 11 não são. Assim, (n – 1, n e n + 1) são números consecutivos;
- **Números naturais pares**: são aqueles que, ao serem divididos por 2, não deixam resto. Por isso, o zero também é par. Logo, todos os números que terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8 são pares;
- **Números naturais ímpares:** ao serem divididos por 2, deixam o resto 1;
- **Todos os números que terminam em 1, 3, 5, 7 ou 9 são ímpares.**

Operações

- A soma ou subtração de dois números pares tem resultado par:

  12 + 8 = 20 | 12 – 8 = 4;

- A soma ou subtração de dois números ímpares tem resultado par:

  13 + 7 = 20 | 13 – 7 = 6;

- A soma ou subtração de um número par com outro ímpar tem resultado ímpar:

  14 + 5 = 19 | 14 – 5 = 9;

- A multiplicação de números pares tem resultado par:

  $8 \cdot 6 = 48$;

- A multiplicação de números ímpares tem resultado ímpar:

  $3 \cdot 7 = 21$;

- A multiplicação de um número par por um número ímpar tem resultado par:

  $4 \cdot 5 = 20$.

DIVISIBILIDADE

Quando temos problemas que envolvem divisão, sabe-se que precisamos de uma maneira mais eficiente e simples para poder achar o resultado. Pensando nisso, temos as regras de divisibilidade, ou seja, ferramentas que nos ajudam nas operações de divisão. Há apenas duas opções em relação ao resultado: a resposta é exata ou não. Vejamos as diversas regras.

Divisibilidade por 2

Um número é divisível por 2 quando ele é par, ou seja, todos os números em que o último algarismo é 0, 2, 4, 6 ou 8 → 256 ÷ 2 = 128.

Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos é divisível por 3. Exemplo: 1236 é divisível por 3, pois a soma de seus algarismos é 1 + 2 + 3 + 6 = 12 (12 é divisível por 3) —> 1236 ÷ 3 = 412.

Divisibilidade por 4

Um número é divisível por 4 quando os dois últimos algarismos também são divisíveis por 4, ou nos números terminados em 00. Exemplos:

- 664 é divisível por 4, pois os dois últimos algarismos são "64", e 64 é divisível por 4 → 3664 ÷ 4 = 916;
- 1500 é divisível por 4, pois o final é 00 → 1500 ÷ 4 = 375.

Divisibilidade por 5

Todos os números que possuem como último algarismo os números 0 ou 5 são divisíveis por 5 → 550 ÷ 5 = 110; ou 1325 ÷ 5 = 265.

Divisibilidade por 6

Todos os números que são divisíveis por 2 e por 3, simultaneamente, são divisíveis por 6. Exemplo: 366 é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo, então também é divisível por 6 → 366 ÷ 6 = 61.

Divisibilidade por 7

Devemos duplicar (dobrar) o algarismo das unidades e subtrair o resto do número. Se o resultado dessa operação for divisível por 7, então o número é divisível por 7. Tomemos como exemplo o número 385:

- Dobra-se o algarismo das unidades: 5 · 2 = 10;
- Subtrai-se o restante do número: 38 – 10 = 28;
- O resultado é divisível por 7, pois 28 ÷ 7 = 4;
- Desta forma, 385 é divisível por 7:
  - 385 ÷ 7 = 55.

Divisibilidade por 8

Se os três últimos algarismos forem divisíveis por 8, ou for número terminado em 000, então esse número será divisível por 8 → 2000 ÷ 8 = 250.

Veja mais um exemplo: 1256 é divisível por 8, pois os três últimos algarismos “256” são divisíveis por 8, ou seja, 256 ÷ 8 = 32. Assim, 1256 ÷ 8 = 157.

Divisibilidade por 9

Um número é divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos é divisível por 9. Exemplo: 5238 é divisível por 9?

- Somando-se os algarismos: 5 + 2 + 3 + 8 = 18 (18 é divisível por 9);
- Desta forma, 5238 é divisível por 9:
  - 5238 ÷ 9 = 582.

Divisibilidade por 10

Todos os números terminados em 0 são divisíveis por 10 → 1130 ÷ 10 = 113.

DECOMPOSIÇÃO DE UM NÚMERO NATURAL EM FATORES PRIMOS

Antes da decomposição, devemos examinar os pré-requisitos deste tópico que irá tratar sobre **números naturais** e **primos**.

Os números naturais constituem a noção numérica mais básica da matemática elementar, pois auxiliam, principalmente, no princípio da contagem. Geralmente denotados por $\mathbb{N}$, os naturais são números inteiros e positivos, ou seja, sem vírgulas, como o 1, o 12, o 300.000 e assim por diante.

Uma noção importante dos naturais é a **divisão**. Como não podemos ter números “quebrados”, com vírgula, dentro deste conjunto, muitas vezes é necessário que se conheçam os **divisores** de um número natural, que são, justamente, os números naturais capazes de dividi-lo **sem que haja resto** na divisão.

Por exemplo, o número 20 tem como divisores os números 1, 2, 4, 5, 10 e 20. Pois:

- 1 · 20 = 20;
- 2 · 10 = 20;
- 4 · 5 = 20.

Como consequência da noção de divisores de um número, temos a ideia de **números primos** destinada para os naturais que possuem **exatamente dois divisores**. Por exemplo, o número 7, que divide apenas por 1 e 7.

Em geral, dizemos que os números primos são aqueles que se dividem apenas por 1 e por ele mesmo.

> **IMPORTANTE!**
>
> O número **1 não é primo**, pois é necessário que existam **exatamente dois divisores** para que um número seja primo, e o 1 possui apenas um divisor, ele mesmo.

Os números primos são infinitos, mas, a seguir, acompanhe os primeiros e mais comuns:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...

Dica: o número 2 é o único número primo que também é par.

A palavra **decompor** é amplamente usada na matemática para se referir ao processo de isolamento dos elementos que constituem um número.

Existe a decomposição básica, em soma, por exemplo, 758 = 700 + 50 + 8, que procura reescrever um número a partir de suas ordens decimais — centena, dezena e unidade, neste caso.

Já a decomposição de um **número natural em fatores primos**, por sua vez, segue o mesmo princípio, porém, o termo **fator** requisita que a decomposição seja feita pensando, agora, na operação de **multiplicação**, como, por exemplo, 12 = 2 · 6. Ou seja, dizemos que o número 12 pode ser decomposto em um produto entre 2 e 6, em que 2 e 6 são os algarismos denominados **fatores da decomposição**.

Note, ainda, que a decomposição deve ser feita em **fatores primos**, como pede o método, portanto, é necessário que se continue a decomposição daqueles números que não são primos, como o 6, que pode ser reescrito como o produto 2 · 3.

Por fim, a decomposição do número 12 em fatores primos será $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$, em que só há números primos sendo utilizados para representar a multiplicação.

O método prático e mais usual de decomposição consiste em traçar uma linha vertical e posicionar o número a ser decomposto ao lado esquerdo e seus divisores primos do lado direito. Os resultados da divisão vão sendo posicionados abaixo do número dividido e o objetivo é chegar no número 1 e finalizar a decomposição.

Acompanhe a seguir a decomposição do número 220:

220	2
110	2
55	5
11	11
1	

Portanto, podemos afirmar que a decomposição de 220 em fatores primos será dada por $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$.

Para prosseguirmos no conteúdo, é interessante ainda recordarmos os **critérios de divisibilidade**, ou seja, quando um número pode ser dividido, por 2, 3 e 5, já que serão os primos mais utilizados.

- **2**: todos os números pares (terminados em 0, 2, 4, 6 ou 8). Exemplo: 3.758, já que termina em 8;
- **3**: a soma dos algarismos é um número divisível por 3. Exemplo: 5.142, uma vez que 5 + 1 + 4 + 2 = 12 e 12 é divisível por 3;
- **5**: números terminados em 0 ou 5. Exemplo: 34.890 e 7.845.

Revise seus conhecimentos com os exercícios comentados a seguir:

1. (NOVA CONCURSOS – 2022) Assinale a alternativa que contenha o valor correto da raiz quadrada de 784.

a) 18
b) 26
c) 28
d) 60
e) 84

Uma das utilidades da decomposição de um número em fatores primos é conhecermos suas raízes. Quando os números são grandes e suas raízes, desconhecidas, decompô-los pode ser uma boa estratégia:

784	2
392	2
196	2
98	2
49	7
7	7
1	

Portanto, podemos representar o número 784 como o produto $2^4 \cdot 7^2$; logo, sua raiz quadrada será dada por $\sqrt{784} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 7^2} = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 4 \cdot 7 = 28$. Resposta: Letra C.

2. (IBFC – 2017) Assinale a alternativa correta referente à quantidade de números primos distintos que encontramos ao decompor o número 360 em fatores primos.

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 9

Decompondo o número 360 em fatores primos, obtemos:

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Como números distintos da decomposição, temos o 2, 3 e 5. Portanto, a quantidade de primos é três. Resposta: Letra C.

3. (FUNDATEC – 2021) A alternativa que apresenta uma decomposição de fatores primos é:

a) 2x4x6.
b) 3x9x15.
c) 3x6x9.
d) 2x3x5.
e) 2x6x7.

Note que, para que tenhamos uma decomposição de um número em fatores primos, é sumariamente necessário que todos os números envolvidos na multiplicação dos fatores sejam primos. Como 4 e 6 se dividem por 1, 2 e 4 e 1, 2, 3 e 6, respectivamente, não são primos. O mesmo se segue para os números 9 e 15, que também não são primos, pois são múltiplos de 3. Portanto, os únicos números primos estão presentes no produto 2x3x5. Resposta: Letra D.

4. (FUNDATEC – 2022) A fatoração de um número em fatores primos é muito usada e possui inúmeras aplicações em computação. Dentre as alternativas abaixo, a única que possui um número com fator primo diferente de 2,3 ou 7 é a de:

a) 42.
b) 70.
c) 84.
d) 126.
e) 294.

Decompondo os números apresentados, temos:

42	2	70	2	84	2	126	2	294	2
21	3	35	5	42	2	63	3	147	3
7	7	7	7	21	3	21	3	49	7
1		1		7	7	7	7	7	7
				1		1		1	

Portanto, o único que não apresenta os fatores 2, 3 e 7 em sua decomposição é o 70, já que falta o 3. Resposta: Letra B.

MÁXIMO DIVISOR COMUM

O máximo divisor comum (MDC ou M.D.C.) corresponde ao maior número divisível entre dois ou mais números inteiros.

Os divisores comuns de 12 e 18 são 1, 2, 3 e 6. Dentre estes, o número maior é o 6. Sendo assim, o número 6 é o máximo divisor comum entre 12 e 18, ou seja, o MDC entre 12 e 18 é igual a 6.

Cálculo do MDC por Fatoração Simultânea

Podemos calcular o MDC entre 2 ou mais números fazendo a fatoração simultânea dos dois números (aqui, é importante ressaltar que a faremos a fatoração até o momento em que o número 1 for quem divide todos os números envolvidos ao mesmo tempo). Veja:

Ex.: calcule o MDC entre 60 e 45.

60 – 45	3 (note que 3 é o número que divide o 60 e o 45 ao mesmo tempo)
20 – 15	5 (note que 5 é o número que divide o 20 e o 15 ao mesmo tempo)
4 – 3	1 (aqui, paramos a fatoração, pois o número 1 é quem divide tudo ao mesmo tempo
	MDC = 3 × 5 × 1 = 15.

Logo, o MDC (60 e 45) = 15.

Passos para calcular o MDC (fatoração simultânea):

- montar uma coluna para os fatores primos e colunas para cada um dos números;
- começar a divisão dos números pelo número que divide todos os números ao mesmo tempo;
- parar a fatoração quando o número 1 for quem divide todo os números ao mesmo tempo;
- o MDC será a multiplicação dos fatores primos utilizados.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM DE DOIS OU MAIS NÚMEROS NATURAIS

Os múltiplos de um número X são aqueles números que podem ser obtidos multiplicando X por outro número natural. Agora, observe os múltiplos dos números 4 e 6:

M(4) = 4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, **36**, ...

M(6) = 6, **12**, 18, **24**, 30, **36**, 42, ...

Quais são os múltiplos iguais (comuns) entre os números? São eles: 12, 24, 36. E qual o menor deles? É o número 12. Sendo assim, o número 12 é o menor múltiplo comum entre 4 e 6, ou seja, o MMC entre 4 e 6 é igual a 12.

Cálculo do MMC por Fatoração Simultânea

Podemos calcular o MMC entre 2 ou mais números, de maneira mais rápida, fazendo a fatoração simultânea dos dois números. Veja:

Ex.: calcule o MMC entre 6 e 8.

6 – 8	2 (aqui devemos colocar o menor número primo)
3 – 4	2 (nesse caso repetimos o número 3, pois ele não é dividido pelo 2)
3 – 2	2
3 – 1	3
1 – 1	MMC = 2 × 2 × 2 × 3 = 24.

Logo, o MMC (6 e 8) = 24.

Com esse método, é possível calcular o MMC entre vários números. Vamos exercitar novamente, dessa vez com mais números.

Ex.: calcule o MMC entre os números 10, 12, 20.

10 – 12 – 20	2 (aqui devemos colocar o menor número primo)
5 – 6 – 10	2 (nesse caso repetimos o número 3, pois ele não é dividido pelo 2)
5 – 3 – 5	3
5 – 1 – 5	5
1 – 1 – 1	MMC = 2 × 2 × 3 × 5 = 60.

Logo, o MMC (10, 12 e 20) = 60.

Passos para calcular o MMC (fatoração simultânea):

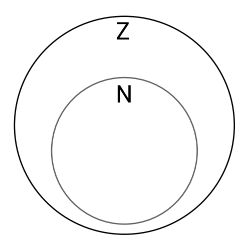
- montar uma coluna para os fatores primos e colunas para cada um dos números;
- começar a divisão dos números pelo menor fator primo (2) e só ir aumentando quando nenhum dos números puder ser dividido.

Se algum dos números não puder ser dividido, basta copiá-lo para a próxima linha. O objetivo é fazer com que todos os números cheguem ao valor 1. O MMC será a multiplicação dos fatores primos utilizados.

O CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Os números inteiros são os números naturais e seus respectivos opostos (negativos). Veja: Z = {..., –7, ––6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}.

O símbolo desse conjunto é a letra Z. Uma coisa importante é saber que todos os números naturais são inteiros, mas nem todos os números inteiros são naturais. Sendo assim, podemos representar por meio de diagramas e afirmar que o conjunto de números naturais está contido no conjunto de números inteiros, ou ainda que N é um subconjunto de Z. Observe:



Podemos destacar alguns subconjuntos de números. Veja:

- **Números inteiros não negativos:** {4, 5, 6...}. Veja que são os números naturais;
- **Números inteiros não positivos:** {... –3, –2, –1, 0}. Veja que o zero também faz parte deste conjunto, pois ele não é positivo nem negativo;
- **Números inteiros negativos**: {... –3, –2, –1}. O zero não faz parte;
- **Números inteiros positivos**: {5, 6, 7...}. Novamente, o zero não faz parte.

Operações

Há quatro operações básicas que podemos efetuar com estes números, são elas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

- **Adição**

É dada pela soma de dois números. Ou seja, a adição de 20 e 5 é: 20 + 5 = 25.

Veja mais alguns exemplos:

- **Adição de 15 e 3:** 15 + 3 = 18;
- **Adição de 55 e 30:** 55 + 30 = 85.

- **Principais Propriedades da Operação de Adição**

- **Propriedade comutativa:** a ordem dos números não altera a soma —> 115 + 35 é igual a 35 + 115;
- **Propriedade associativa:** quando é feita a adição de 3 ou mais números, podemos somar 2 deles primeiramente, e depois somar o outro. Independentemente da ordem vamos obter o mesmo resultado —> 2 + 3 + 5 = (2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5) = 10;
- **Elemento neutro:** o zero é o elemento neutro da adição, pois qualquer número somado a zero é igual a ele mesmo —> 27 + 0 = 27; 55 + 0 = 55;
- **Propriedade do fechamento**: a soma de dois números inteiros sempre gera outro número inteiro. Exemplo: a soma dos números inteiros 8 e 2 gera o número inteiro 10 (8 + 2 = 10).

- **Subtração**

Subtrair dois números é o mesmo que diminuir de um deles o valor do outro. Ou seja, subtrair 7 de 20 significa retirar 7 de 20, restando 13: 20 – 7 = 13.

Veja mais alguns exemplos:

- **Subtrair 5 de 16:** 16 – 5 = 11;
- **10 subtraído de 30:** 30 – 10 = 20.

- **Principais Propriedades da Operação de Subtração**

- **Elemento neutro:** o zero é o elemento neutro da subtração, pois, ao subtrair zero de qualquer número, este número permanecerá inalterado → 13 – 0 = 13;
- **Propriedade do fechamento:** a subtração de dois números inteiros sempre gera outro número inteiro → 33 – 10 = 23.

- **Multiplicação**

A multiplicação funciona como se fosse uma repetição de adições. Veja: a multiplicação 20 · 3 é igual à soma do número 20 três vezes (20 + 20 + 20), ou à soma do número 3 vinte vezes (3 + 3 + 3 + ... + 3).

Algo que é muito importante, e que você deve lembrar sempre, são as regras de sinais na multiplicação de números.

SINAIS NA MULTIPLICAÇÃO		
Operações		Resultados
+	+	+
–	–	+
+	–	–
–	+	–

Atenção:

- A multiplicação de números de mesmo sinal tem resultado positivo: 51 · 2 = 102; (–33) · (–3) = 99;
- A multiplicação de números de sinais diferentes tem resultado negativo: 25 · (–4) = –100; (–15) · 5 = –75.

- **Principais Propriedades da Operação de Multiplicação**

- **Propriedade comutativa:** A · B é igual a B · A, ou seja, a ordem não altera o resultado —> 8 · 5 = 5 · 8 = 40;
- **Propriedade associativa:** (A · B) · C é igual a (C · B) · A, que é igual a (A · C) · B —> (3 · 4) · 2 = 3 · (4 · 2) = (3 · 2) · 4 = 24;
- **Elemento neutro:** a unidade (1) é o elemento neutro da multiplicação, pois ao multiplicar 1 por qualquer número, esse número permanecerá inalterado —> 15 · 1 = 15;
- **Propriedade do fechamento:** a multiplicação de números inteiros sempre gera um número inteiro —> 9 · 5 = 45;
- **Propriedade distributiva:** essa propriedade é exclusiva da multiplicação. Veja como fica: A · (B + C) = (A · B) + (A · C), ou seja, 3 · (5+7) = 3 · (12) = 36.

  Usando a propriedade: 3 · (5 + 7) = 3 · 5 + 3 · 7 = 15 + 21 = 36.

- **Divisão**

Quando dividimos A por B, queremos repartir a quantidade A em partes de mesmo valor, sendo um total de B partes.

Exemplo: temos 50 balas e queremos dividir entre 10 pessoas, isto é, queremos dividir 50 em 10 partes de mesmo valor. Ou seja, nesse caso teremos 10 partes de 5 unidades, pois se multiplicarmos 10 · 5 = 50. Ou, ainda, podemos somar 5 unidades 10 vezes consecutivas, ou seja, 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 50.

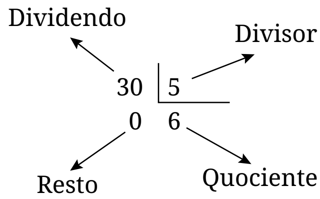
Algo que é muito importante, e que você deve lembrar sempre, são as regras de sinais na divisão de números.

SINAIS NA DIVISÃO		
Operações		Resultados
+	+	+
–	–	+
+	–	–
–	+	–

- **Atenção**:

- A divisão de números de mesmo sinal tem resultado positivo: 60 ÷ 3 = 20; (–45) ÷ (–15) = 3;
- A divisão de números de sinais diferentes tem resultado negativo: 25 ÷ (–5) = –5; (–120) ÷ 5 = –24

Esquematizando:



Dividendo = Divisor · Quociente + Resto
$30 = 5 \cdot 6 + 0$

- **Principais Propriedades da Operação de Divisão**
  - **Elemento neutro:** a unidade (1) é o elemento neutro da divisão, pois, ao dividir qualquer número por 1, o resultado será o próprio número —> $15 \div 1 = 15$.

> **DICA!**
> A divisão não possui propriedade do fechamento, diferenciando-se das demais operações com números inteiros. A divisão não possui essa propriedade, uma vez que ao dividir números inteiros podemos obter resultados fracionários ou decimais: $2 \div 10 = 0{,}2$ (não pertence ao conjunto dos números inteiros).

Múltiplos e Divisores

Sejam dois números naturais x e y, temos que x é múltiplo de y quando existe um número natural z tal que $x = y \cdot z$.

Dessa maneira, temos que 30 é múltiplo de 3, uma vez que $3 \cdot z = 30$, onde $z = 10$. De mesma forma, 30 é múltiplo de 10, uma vez que $10 \cdot z = 30$, onde $z = 3$.

Vamos calcular alguns dos múltiplos de 2 multiplicando o 2 por todos os números naturais de 0 a 10.

$2 \cdot 0 = 0$
$2 \cdot 1 = 2$
$2 \cdot 2 = 4$
$2 \cdot 3 = 6$
$2 \cdot 4 = 8$
$2 \cdot 5 = 10$
$2 \cdot 6 = 12$
$2 \cdot 7 = 14$
$2 \cdot 8 = 16$
$2 \cdot 9 = 18$
$2 \cdot 10 = 20$

Assim, temos que o conjunto N dos múltiplos de 2 é N = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20...}.

Lembre-se de que o conjunto dos múltiplos é **infinito**!

Sejam dois números naturais ***x*** e ***y***, temos que ***x*** é divisor de ***y*** quando existe um número natural z tal que $z = \frac{y}{x}$ de maneira que **não haja resto na divisão**.

Dessa maneira, temos que **5 é divisor de 300,** uma vez que $300 \div 5 = z$, tal que $z = 60$.

Para encontrarmos os divisores de um número, verificamos se o resultado da divisão é inteiro. Vejamos os divisores de 30:

$30 \div 30 = 1$
$30 \div 15 = 2$
$30 \div 10 = 3$
$30 \div 5 = 6$
$30 \div 2 = 15$
$30 \div 1 = 30$

Temos, então, que o conjunto D dos divisores de 30 é dado por D = {1, 2, 3, 6, 15 e 30}.

Perceba que, ao contrário do conjunto dos múltiplos, o conjunto dos divisores é **finito**!

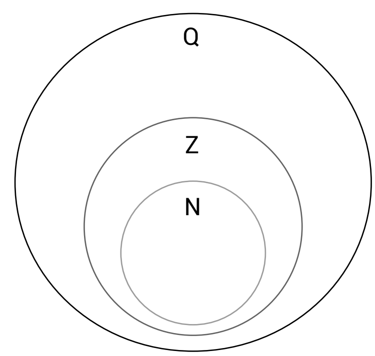
O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

São aqueles que podem ser escritos na forma da divisão (fração) de dois números inteiros. Ou seja, escritos na forma $\frac{A}{B}$ (A dividido por B), onde A e B são números inteiros.

Exemplos: $\frac{7}{4}$ e $\frac{-15}{9}$ são racionais. Veja, também, que os números 87, 321 e 1221 são racionais, pois são divididos pelo número 1.

Atenção: qualquer número natural é também inteiro e todo número inteiro é também racional.

O símbolo desse conjunto é a letra Q e podemos representar por meio de diagramas a relação entre os conjuntos naturais, inteiros e racionais, veja:



Representação Fracionária e Decimal

Há 3 tipos de números no conjunto dos números racionais:

- **Frações:** $\frac{8}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{11}$ etc.;
- **Números decimais com finitas casas:** 1,75;
- **Dízimas periódicas:** 0,33333...

Propriedades e Operações

As operações de adição e subtração de números racionais seguem a mesma lógica das operações com números inteiros. Veja:

$15{,}25 + 5{,}15 = 20{,}4$

$$\begin{array}{r} 15{,}25 \\ +05{,}15 \\ \hline 20{,}40 \end{array}$$

57,3 – 0,12 = 57,18 57,30

+00,12

57,18

- **Multiplicação de números decimais:** aplicamos o mesmo procedimento da multiplicação comum, contudo, precisamos ficar atentos à colocação da vírgula.

$$4{,}6 \cdot 1{,}70 = 6{,}9020 \text{ ou } 6{,}902$$

4,06 → 2 casas decimais

x 1,70 → 2 casas decimais

000
2842
+406

6,9020 → 4 casas decimais

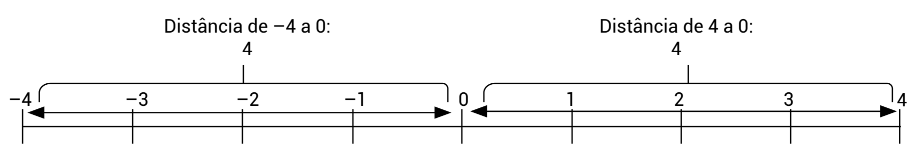
- **Divisão de números decimais:** devemos multiplicar ambos os números (divisor e dividendo) por uma potência de 10 (10, 100, 1000, 10000 etc.), de modo a retirar todas as casas decimais presentes. Após isso, é só efetuar a operação normalmente.

$5{,}7 \div 1{,}3$
$5{,}7 \cdot 100 = 570$
$1{,}3 \cdot 100 = 130$

$570 \div 130 = 4{,}38$

VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO

Entende-se por módulo de um número a **distância dele em relação ao ponto de origem**. Veja a imagem a seguir para compreender melhor:



Perceba que os **módulos** de –4 e 4 são 4.

Podemos ainda dizer que o **valor absoluto** ou **módulo** de um número corresponde a sua parte numérica natural, desconsiderando-se o sinal nos casos de números negativos.

O valor absoluto de um número x é denotado por |x| e pode ser definido como:

$$\begin{cases} |x| = x & \text{se } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- se x é positivo ou é igual a zero, seu módulo é ele mesmo. Exemplo: $|0|=0$ e $|8| = 8$;
- se x é um número negativo, então seu módulo é igual ao seu oposto, ou seja, sua versão positiva. Exemplo: $|-6| = -(-6) = 6$.

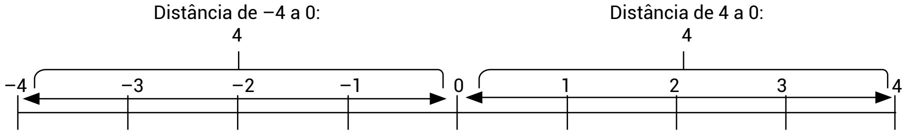
Com isso, algumas propriedades importantes podem ser enunciadas:

- todo módulo é não negativo: $|x| \geq 0$;
- se o módulo de um número dá zero, então este número é o próprio zero;
- o produto dos módulos é equivalente ao módulo do produto: $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$;
- o módulo ao quadrado é equivalente ao próprio número ao quadrado: $|x|^2 = x^2$.

Pensando na imagem apresentada anteriormente para definir módulo, vamos conceituar o que é número oposto.

- **Número Oposto ou Simétrico**

Entende-se por números opostos ou números simétricos aqueles que possuem a **mesma distância da origem.**



Na imagem acima, podemos notar que –4 é o oposto de 4, tal como 4 é o oposto de –4, uma vez que eles possuem a mesma distância do ponto de origem, nesse caso o 0.

Revise seus conhecimentos com os exercícios comentados a seguir.

1. (BIO-RIO – 2014) Considere os números –13, –7, –3, 2, 10. O de menor valor absoluto é o:

a) –13
b) –7
c) –3
d) 2

Note que este tipo de questão tende a confundir pelo fato de requisitar o menor valor absoluto, que não deve ser confundido com o menor número. Caso fosse, teríamos como resposta que o menor número é –13. No entanto, seu valor absoluto é |–13| = 13, sendo o maior valor absoluto dentre os números apresentados. Para perceber com maior clareza, desconsidere os sinais de negativo e tome o menor número. Portanto, temos como resposta o número 2, cujo valor absoluto é, também, 2. Resposta: Letra D.

2. (CONSEP – 2011) Observe o número 4581 (quatro mil quinhentos e oitenta e um). Verifique a veracidade dos itens a seguir:

I. O valor absoluto desse número é ele próprio.
II. O valor relativo da casa das centenas é 500.
III. O valor absoluto do seu oposto é 4581.
Qual (ais) item (ns) está (ão) correto (s)?

a) Apenas o item I.
b) Apenas o item II.
c) Apenas o item III.
d) Todos os itens estão corretos.

A afirmação I é verdadeira, já que o valor absoluto de um número positivo é ele mesmo.
A afirmação II é verdadeira, uma vez que o algarismo 5 ocupa a ordem das centenas, representando o valor relativo (ou posicional) de 500.
A afirmação III também é verdadeira, pois oposto de 4.581 é –4.581 e seu valor absoluto é dado por |–4.581| = 4.581. Resposta: Letra D.

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

A matemática nasceu das necessidades humanas de controle de sistemas de ordem social, como o número de indivíduos nos rebanhos, as operações financeiras antigas envolvendo trocas, a tentativa de entender os processos astronômicos, entre outros.

As operações simples nasceram da contagem nos dedos, por exemplo. A poderosa matemática que hoje conduz aos estudos das previsões do tempo, do lançamento de foguetes ao espaço, da física quântica e da relatividade, teve origem nas contas feitas nos dedos! Logo, ela é derivada de raciocínios simples que, somados, levam à complexidade.

Nesse sentido, vamos seguir um raciocínio simples para que você entenda a potenciação, de onde ela nasceu e, depois, sua operação inversa, a radiciação.

Depois de um tempo usando os números, já em notações escritas, deve-se ter percebido que a multiplicação é a soma de fatores iguais. Veja:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \text{ vezes o } 3 = 4 \cdot 3 = 12.$$

IMPORTANTE!

Muitas vezes, vemos nos livros didáticos um erro de notação matemática. O símbolo do produto ou multiplicação pode ser x (que pode ser confundido com a letra x num texto), * ou · . No entanto, não pode ser *, em cima na linha, nem . embaixo. O asterisco e o ponto devem estar no meio da linha. Um ponto na parte de baixo pode ser confundido com a notação de decimal, por exemplo, 3.2 é um decimal e 3 · 2 é 6.

Mesmo um número x ∈ ℝ pode ser multiplicado considerando sua parte fracionária ou decimal:

2.142857 + 2.142857 = 2 vezes o 2.142857=2 · 2.142857 = 4.285714.

Usando o mesmo raciocínio, a potenciação nasceu da multiplicação de fatores iguais:

2 · 2 · 2 · 2 = 2 multiplicado 4 vezes por ele mesmo.

Uma das principais evoluções que ocorreram na matemática foi o desenvolvimento das notações, uma espécie de alfabeto modificado para que seja mais fácil a comunicação; essa linguagem matemática usa símbolos vários, alguns mais complexos, com significados também complexos, mas não é o caso da linguagem utilizada no ensino médio.

A notação para 2 · 2 · 2 · 2 = 2 multiplicado 4 vezes por ele mesmo = 2^4.

Cada número recebe um nome para que possamos nos comunicar sobre esse tema, a potenciação.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Base}}}{2}^{4 \rightarrow \text{Expoente}}$$

O expoente recebe, também, o nome de potência; assim, dizemos que a base 2 está elevada a 4ª potência ou ao expoente 4.

Para entendermos que os expoentes podem fazer parte de qualquer conjunto de número (aqui, vamos até o conjunto dos números ℝ), precisamos compreender um pouco mais sobre a multiplicação. Baseados na soma que gerou a multiplicação, podemos fazer uma multiplicação um pouco mais complexa do que aquela do exemplo acima usando os fatores de soma. Vejamos:

35 · 10,5 = 367,5 é feito usando um algoritmo de multiplicação aprendido cedo na escola:

```
    35
 × 10,5
   175
+  00
  35
  367,5
```

Aqui vemos a soma intrínseca na multiplicação; o uso desse algoritmo é feito multiplicando cada número do 10.5 por 35. Com o aumento de uma casa decimal, o resultado do produto avança uma casa para a esquerda, por isso, o 0 está debaixo do 7 e o 5, debaixo do 3. Feita a soma, conta-se o número de casas decimais, nesse caso, uma, e coloca-se no resultado da soma a vírgula ou ponto após o mesmo número de casas contadas nos produtos.

Um dos principais problemas no ensino de matemática é a escassez de informações fornecidas aos estudantes sobre o uso correto do sistema decimal. É de bom alvitre que o estudante procure conhecer melhor os algoritmos derivados das operações matemáticas básicas em função dos conhecimentos do sistema decimal.

Em função do que explicamos, podemos fazer aquela conta mentalmente, veja: separamos a casa decimal, 0,5 e fazemos a multiplicação de 35 por 10, que dá 350, e somamos a multiplicação de 0,5 vezes 35, que, na verdade, é a metade de 35, i.e., 17,5.

Agora ficou fácil, somamos 350 a 17,5 e temos 367,5.

Baseados nesse raciocínio, podemos, também, usá-lo na potenciação, vejamos um caso como exemplo:

$2^{3.5}$ = considerando a composição de fatores,temos, $2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \cdot 2^{0.5} = 2^3 \cdot 2^{0.5}$

Voltamos, então para a soma, i.e., $2^3 \cdot 2^{0.5} = 2^{3+0.5} = 2^{3.5}$. Aqui, acrescentamos uma propriedade natural da potenciação, os expoentes de mesma base podem ser somados; veremos mais sobre isso à frente.

Nossa intenção não é dar a resposta dessa potência, mas mostrar que raciocinar sobre potência associa as bases soma e produto e mostra que a potência pertence ao conjunto ℝ.

Pertencer a ℝ significa que temos potências que pertencem aos conjuntos dos números naturais (ℕ), aos inteiros (ℤ), aos racionais, aos irracionais. Vamos estudar cada caso, tanto de potenciação quanto de radiciação em tópicos à frente.

Em termos de radiciação, considere o raciocínio. O número $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ (leia as equações devagar e traduzindo para a língua portuguesa, nesse caso, oito é igual a três vezes 2 que é igual 2 elevado ao expoente 3), que significa dizer que a raiz cúbica de 8 é um número que, ao ser multiplicado 3 vezes por si mesmo, é igual a 8; nesse caso, o número deve pertencer ao conjunto dos reais e ser positivo como condição necessária para usar essa notação. A representação em linguagem matemática desse raciocínio é $\sqrt[3]{8} = 2$.

Assim como na representação matemática da potenciação, cada número recebe um nome na estrutura da radiciação:

$$\text{Índice} \leftarrow \sqrt[3]{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Base}}}{8}}$$

Em geral nos problemas sobre radiciação, podemos usar o conceito de fatoração.

IMPORTANTE!

A fatoração é a decomposição de um produto por seus componentes básicos. Uma vez que os números primos são por definição divisíveis apenas por 1 e por si mesmos, fatorar um número qualquer é decompô-lo no produto entre os números primos pelos quais ele é divisível.

Para a raiz cúbica de 216 $\left(\sqrt[3]{216}\right)$, veja a fatoração em números primos:

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Dizemos que 216 fatorado é $216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (2^3 \cdot 3^3) = (2 \cdot 3)^3$, fazendo a substituição $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{(2.3)^3} = 2 \cdot 3 = 6$. Observe que a multiplicação de bases diferentes com o mesmo expoente é a multiplicação das bases, entre parênteses, elevada ao expoente igual.

MATEMÁTICA

Podemos ter casos vários casos dentro dos conjuntos de números com algumas restrições que serão mostradas à frente. Aqui, queremos que entenda as ideias e os raciocínios. Vamos analisar o caso de um número cuja raiz enésima com índice de valor n (veja o que é índice na figura de raiz cúbica de 8, acima) de um número qualquer não apresenta valor inteiro ou racional.

Considere $\sqrt{18}$ (nos casos em que o índice é omitido, n = 2). Fatorando, temos:

18	2
9	3
3	3
1	

Então, temos, neste caso $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3 \cdot \sqrt{2}$. Veja que o 3 foi retirado da raiz quadrada por estar elevado ao quadrado, e o 2 permaneceu. Essa simplificação é considerada elegante entre os matemáticos.

Potenciação E Radiciação Com Expoentes Naturais

Consideremos uma potência cuja base é $a \in \mathbb{R}$ e o expoente é p > 0 e $p \in \mathbb{N}$ (lembre-se de traduzir calmamente para o português a linguagem matemática). Neste caso, o valor da potência é o número b ∈ R, cujo raiz de índice p é o valor a.

$$a^n = b \leftrightarrow \sqrt[n]{b} = a$$

Esta afirmação é a base tanto da potenciação quanto da radiciação com números inteiros e mostra o porquê dessas duas operações serem inversas uma da outra.

Quando tratamos de expoentes naturais, estamos analisando as bases para essas operações, também, com os expoentes inteiros, racionais e reais.

Algumas considerações são necessárias, nem sempre entendidas de modo intuitivo. Considere a afirmação $a^0 = 1$, a qual vale para qualquer que seja o valor de a . Podemos interpretar essa igualdade como sendo multiplicado por si mesmo de a 0 vezes e, como a é alguma coisa, não pode ser nada, e, em termos matemáticos, esse ente é necessário para que outras operações provadas possam ser definidas, então $a^0 = 1$.

Numa outra análise com exemplos, estudemos as potências $(-2)^2$, $(-2)^3$ e -2^2:

$$(-2)^2 = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) = 4$$
$$(-2)^3 = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$
$$-2^2 = (-1) \cdot 2 \cdot 2 = -4$$

Os resultados dessas potências podem ser utilizados como base para qualquer outra potência de expoente natural (lembre o que é base, expoente, índice e radicando).

Qualquer que seja o valor de a , se ele estiver elevado por um número par, resultará em $b > 0 \cdot (\sqrt[n]{b} = a)$, pois, pelo princípio da multiplicação dos números, multiplicar dois números positivos ou dois números negativos resulta sempre em um número positivo.

Caso a < 0, se ele for elevado a um expoente ímpar, o princípio anterior determina que b < 0, pois a multiplicação de números de sinais opostos resulta em um número negativo ($a^n = b$).

Por fim, podemos considerar a importância de se utilizar corretamente a notação apropriada, pois $(-2)^2$ indica que (–2) está sendo multiplicado por si mesmo 2 vezes, porém -2^2 indica que está sendo multiplicado por si mesmo 2 vezes e o resultado multiplicado por (–1).

Para a radiciação, as conclusões anteriores permitem analisar dois casos distintos.

Se b > 0, para qualquer que seja o valor de n, a > 0, que é uma propriedade básica da radiciação.

Vejamos isso com calma. A operação $\sqrt{4} = -2$ é uma afirmação incorreta, apesar de $(-2)^2 = 4$, pois não existe um número **real** que multiplicado por ele mesmo gere –2.

Aproveitemos para melhorar a relação entre potenciação e radiciação e explicar o que dissemos acima. Temos que $\sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}$, e que um expoente elevado a um outro expoente pode ser multiplicado, i.e., $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Veja que essa relação pode ser entendida diretamente, pois multiplicando m vezes n, teremos $n \cdot m$.

Agora podemos explicar o motivo de $\sqrt{4} = -2$ não poder existir dentro dos conceitos matemáticos. Então, teremos:

$$\sqrt[2]{41} = -2 \Rightarrow 4^{\frac{1}{2}} = -2 \Rightarrow (2^2)^{\frac{1}{2}} = -2 \Rightarrow (2)^{2 \cdot \frac{1}{2}} = -2 \Rightarrow$$
$$(2)^1 = -2\nexists$$

Como solução para essa equação, pois nenhum número real –2 pode ser igual ao seu positivo, a não ser que seja afirmado que esse número é um módulo, i.e., independente da posição na reta dos números reais, o que interessa é sempre a distância do número em relação ao início dos eixos. O número 5 está 5 unidades à direita da origem da reta dos reais e o número –5 está 5 unidades à esquerda da origem da reta dos reais; então, como o que interessa é a distância, os sinais não fazem sentido e representamos o 5 como modulo de 5, i.e., $|-5|$.

Por outro lado, então, mostrando novamente a importância da notação, temos que $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ e não $\sqrt{(-5)^2} = -5$.

Para o caso de base negativa com expoentes também negativos ímpares, i.e., b < 0, $a \in \mathbb{R}$ apenas se n for ímpar resultando em a < 0, por exemplo,

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-2^3} = -2^{\frac{3}{3}} = -2^1 = -2$$

Entretanto, isso não gerará um resultado dentro dos números reais se n for par. Faça o teste!

Potenciação E Radiciação Com Expoentes Inteiros

Lembre-se de que o conjunto dos números inteiros possui os números negativos, o que não ocorre com o conjunto dos números naturais, então, os principais comentários aqui serão sobre os expoentes negativos.

Pela definição da radiciação, um índice n não pode assumir valores negativos ou racionais; entretanto, a mesma restrição não se aplica ao expoente de uma potência.

Pela noção de potência como o produto de um número vezes si mesmo n vezes, a ideia de n < 0 não apresenta sentido lógico em uma primeira análise; porém, se considerarmos que o sinal do expoente diz respeito ao valor da base da potência, a situação se altera.