

SUMÁRIO

LÍNGUA PORTUGUESA.....	17
■ TEXTO: INTERPRETAÇÃO DE TEXTOS LITERÁRIOS OU NÃO LITERÁRIOS.....	17
■ GRAMÁTICA	19
FONÉTICA	19
ENCONTROS VOCÁLICOS E ENCONTROS CONSONANTAIS	19
ORTOGRAFIA	20
TONICIDADE.....	20
ACENTUAÇÃO GRÁFICA	21
■ MORFOLOGIA: PROCESSOS DE FORMAÇÃO DE PALAVRAS	21
■ CLASSES DE PALAVRAS	25
SUBSTANTIVO	26
Classificação.....	26
Flexão	26
ADJETIVO: CLASSIFICAÇÃO E FLEXÃO.....	28
Locução Adjetiva	28
ADVÉRBIO	30
Classificação.....	30
Locução Adverbial	31
PRONOME: CLASSIFICAÇÃO E EMPREGO	32
Colocação Pronominal	36
VERBO	36
Flexão Verbal (Número, Pessoa, Modo, Tempo, Voz)	36
Conjugação do Tempo Simples	37
Conjugação do Tempo Composto.....	37
Classificação: Regulares, Irregulares, Defectivos, Abundantes, Auxiliares e Principais	37
CONJUNÇÕES.....	44
Coordenativas	44
Subordinativas	44
■ PONTUAÇÃO	45

■ SINTAXE	48
PERÍODO SIMPLES	48
TERMOS ESSENCIAIS	48
TERMOS INTEGRANTES	51
TERMOS ACESSÓRIOS.....	52
PERÍODO COMPOSTO	53
PERÍODO COMPOSTO POR COORDENAÇÃO.....	54
PERÍODO COMPOSTO POR SUBORDINAÇÃO	54
Orações Reduzidas	56
Regência Verbal	57
Regência Nominal.....	58
Concordância Verbal	58
Concordância Nominal.....	61
■ CRASE	64
■ TIPOS DE DISCURSO	65
■ ESTILÍSTICA	66
FIGURAS DE LINGUAGEM	66
METÁFORA.....	66
METONÍMIA	66
HIPÉRBOLE	67
PROSOPOPEIA	67
EUFEMISMO	67
ANTÍTESE.....	67
LÍNGUA INGLESA - NÍVEL BÁSICO.....	71
■ GRAMÁTICA	71
SUBSTANTIVOS: GÊNERO, SINGULAR E PLURAL, COMPOSTO, CONTÁVEL E INCONTÁVEL E FORMA POSSESSIVA	71
ADJETIVOS: POSIÇÃO, GRAU DE COMPARAÇÃO, SINÔNIMOS E ANTÔNIMOS	76
PRONOMES: PESSOAL DO CASO RETO E DO OBLÍQUO, INDEFINIDOS, RELATIVOS, DEMONSTRATIVOS, POSSESSIVOS E REFLEXIVO	84
ADVÉRBIOS: FORMAÇÃO, TIPOS E USO	88

Pronomes e Advérbios Interrogativos	92
PREPOSIÇÕES	92
CONJUNÇÕES.....	96
VERBOS: REGULARES, IRREGULARES, AUXILIARES E TEMPOS VERBAIS.....	98
Simple Present	98
Present Progressive.....	101
Present Perfect	102
Simple Past	103
Past Progressive.....	105
Future	107
MODAL VERBS.....	111
INFINITIVO E GERÚNDIO.....	112
MODOS IMPERATIVO E SUBJUNTIVO	113
ORAÇÕES CONDICIONAIS (0, 1 E 2).....	113
VOZ PASSIVA.....	114
PHRASAL VERBS.....	116
QUESTION TAGS.....	116
QUANTIFICADORES.....	120
PREFIXOS E SUFIXOS.....	121
ARTIGOS DEFINIDOS E INDEFINIDOS	123
■ COMPREENSÃO DE TEXTOS: TEXTOS DE ASSUNTOS TÉCNICOS E GERAIS.....	125
MATEMÁTICA.....	137
■ ÁLGEBRA I.....	137
FUNÇÕES: DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO.....	137
FUNÇÕES DEFINIDAS POR FÓRMULAS.....	137
DOMÍNIO, IMAGEM E CONTRADOMÍNIO	138
FUNÇÕES INJETORA, SOBREJETORA E BIJETORA.....	138
FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE.....	138
FUNÇÃO COMPOSTA	139
FUNÇÃO INVERSA E GRÁFICOS	139
FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU.....	140

FUNÇÃO QUADRÁTICA.....	141
FUNÇÃO MODULAR	145
FUNÇÃO EXPONENCIAL	146
FUNÇÃO LOGARÍTMICA.....	147
RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E SISTEMAS	151
SEQUÊNCIAS.....	153
PROGRESSÃO ARITMÉTICA	153
PROGRESSÃO GEOMÉTRICA.....	155
■ GEOMETRIA PLANA	157
ÂNGULOS	157
POLÍGONOS	159
Definição, Elementos e Propriedades.....	159
Nomenclatura.....	160
Polígonos Regulares.....	161
Perímetros.....	161
Áreas.....	161
TRIÂNGULOS	162
Condições de Existência, Elementos, Classificação e Propriedades.....	162
Congruência	162
Bissetriz.....	163
Altura.....	163
Pontos Notáveis e Mediana	164
Semelhança.....	165
Casos de Semelhança	165
Relações Métricas	166
Áreas.....	166
QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS: DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES.....	166
CÍRCULO E SUAS PARTES: CONCEITOS, ÁREAS E CIRCUNFERÊNCIA: DEFINIÇÕES E ELEMENTOS	169
Ângulos na Circunferência	169
Comprimento da Circunferência.....	171
SEGMENTOS TANGENTES.....	171
POTÊNCIA DE PONTO	172
Posições Relativas de Reta e Circunferência.....	172
■ TRIGONOMETRIA.....	173

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	173
ARCOS E ÂNGULOS EM GRAUS E RADIANOS	175
RELAÇÕES DE CONVERSÃO	175
CICLO TRIGONOMÉTRICO	175
ARCOS CÔNGRUOS E SIMÉTRICOS	176
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	177
RELAÇÕES E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS	183
FÓRMULAS DE ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO, DUPLICAÇÃO E BISSECÇÃO DE ARCOS.....	184
EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	187
LEIS DOS SENOS E DOS COSSENOS	189
■ ÁLGEBRA II.....	190
MATRIZES	190
Conceitos.....	190
Igualdade.....	192
Operações	192
DETERMINANTES.....	194
SISTEMAS LINEARES.....	196
ANÁLISE COMBINATÓRIA	200
Arranjos	202
Permutações Simples.....	203
Combinações	203
PROBABILIDADES	203
■ ESTATÍSTICA.....	207
CONCEITOS.....	207
POPULAÇÃO E AMOSTRA	208
VARIÁVEL.....	212
TABELAS	213
GRÁFICOS	215
Histograma.....	217
Polígono de Frequência.....	217
MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA.....	217
Moda.....	217

Média	218
Tipos de Frequências	220
Mediana.....	221
■ GEOMETRIA ESPACIAL	222
POLIEDRO: CONCEITOS E PROPRIEDADES.....	222
PRISMA: CONCEITOS, PROPRIEDADES, DIAGONAIS, ÁREAS E VOLUMES	223
PIRÂMIDE: CONCEITOS, ÁREAS E VOLUMES.....	225
CILINDRO: CONCEITOS, ÁREAS E VOLUMES	226
CONE: CONCEITOS, ÁREAS E VOLUMES	227
ESFERA: CONCEITOS, ÁREAS E VOLUMES.....	229
■ GEOMETRIA ANALÍTICA	229
ESTUDO ANALÍTICO DO PONTO	229
Ponto Médio e Condição de Alinhamento de Três Pontos	230
Cálculo do Baricentro	230
Distância Entre Dois Pontos.....	231
Área do Triângulo.....	231
ESTUDO ANALÍTICO DA RETA	231
Equação Geral e Equação Reduzida	231
Equação Segmentária.....	232
Posição entre Duas Retas	232
Paralelismo e Perpendicularismo de Retas	232
Ângulo entre Duas Retas	233
Distância de um Ponto a uma Reta	233
ESTUDO ANALÍTICO DA CIRCUNFERÊNCIA	233
Equações	233
Posições Relativas entre Ponto e Circunferência.....	234
Entre Reta e Circunferência e Entre Duas Circunferências	234
■ ÁLGEBRA III	236
NÚMEROS COMPLEXOS	236
Conceitos.....	236
Conjugado	236
Igualdade.....	236
Operações	236
Potências de i	237

Representação no Plano de Argand-Gauss e Argumento.....	238
Módulo.....	238
Forma Trigonométrica e Operações na Forma Trigonométrica	238
POLINÔMIOS.....	241
Conceito.....	241
Grau.....	241
Valor Numérico	241
Polinômio Nulo	242
Identidade e Operações.....	242
Equações Polinomiais: Conceitos	243
Teorema Fundamental da Álgebra – Teorema da Decomposição	244
Multiplicidade de uma Raiz.....	244
Raízes Complexas	244
Relações de Girard.....	245
FÍSICA.....	251
■ CONCEITOS BÁSICOS E FUNDAMENTAIS.....	251
NOTAÇÃO CIENTÍFICA	251
NOÇÕES DE ORDEM DE GRANDEZA.....	251
Observações e Mensurações: Representação de Grandezas Físicas como Grandezas Mensuráveis....	252
SISTEMAS DE UNIDADES.....	252
GRÁFICOS E VETORES	253
CONCEITUAÇÃO DE GRANDEZAS VETORIAIS E ESCALARES	253
OPERAÇÕES BÁSICAS COM VETORES; COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DE VETORES.....	253
■ O MOVIMENTO, O EQUILÍBRIO E A DESCOBERTA DAS LEIS FÍSICAS	255
GRANDEZAS FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA: TEMPO, ESPAÇO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO.....	255
DESCRIÇÕES DO MOVIMENTO E SUA INTERPRETAÇÃO: QUANTIFICAÇÃO DO MOVIMENTO E SUA DESCRIÇÃO MATEMÁTICA E GRÁFICA	256
■ CASOS ESPECIAIS DE MOVIMENTOS E SUAS REGULARIDADES OBSERVÁVEIS.....	257
MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME (M.R.U.): CONCEITUAÇÃO E EQUAÇÃO HORÁRIA.....	257
MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (M.R.U.V.): CONCEITO, EQUAÇÕES HORÁRIAS E DE TORRICELLI	258
QUEDA LIVRE E ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE	259
LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS	259

MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME (M.C.U.).....	260
FORÇA E VARIAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO	261
LEIS DE NEWTON	261
Conceito de Inércia, Sistemas de Referência Inerciais e Não Inerciais	261
LEI DE HOOKE	263
CENTRO DE MASSA.....	263
CENTRO DE GRAVIDADE E A IDEIA DE PONTO MATERIAL	264
MASSA E QUANTIDADE DE MOVIMENTO (MOMENTO LINEAR).....	265
TEOREMA DO IMPULSO E COLISÕES	265
LEI DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO (MOMENTO LINEAR).....	266
Conceito de Forças Externas e Internas.....	266
MOMENTO DE UMA FORÇA (TORQUE)	266
CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO DE PONTO MATERIAL E DE CORPOS EXTENSOS.....	267
FORÇA DE ATRITO	267
FORÇA NORMAL DE CONTATO E TRAÇÃO	268
PRESSÃO E DENSIDADE.....	269
PRESSÃO ATMOSFÉRICA E EXPERIÊNCIA DE TORRICELLI.....	270
PRINCÍPIOS DE PASCAL, ARQUIMEDES (EMPUXO) E STEVIN: CONDIÇÕES DE FLUTUAÇÃO, RELAÇÃO ENTRE DIFERENÇA DE NÍVEL E PRESSÃO HIDROSTÁTICA	271
■ ENERGIA, TRABALHO E POTÊNCIA.....	272
TRABALHO	272
ENERGIA.....	273
POTÊNCIA	273
RENDIMENTO.....	273
ENERGIA POTENCIAL E ENERGIA CINÉTICA	273
CONSERVAÇÃO DE ENERGIA MECÂNICA	274
DISSIPACÃO DE ENERGIA	274
FORÇAS CONSERVATIVAS E DISSIPATIVAS.....	275
■ MECÂNICA E O FUNCIONAMENTO DO UNIVERSO.....	275
FORÇA PESO	275
ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL.....	275

LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL	275
LEIS DE KEPLER E OS MOVIMENTOS DE CORPOS CELESTES.....	276
■ FENÔMENOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS	277
CARGA ELÉTRICA	277
CORRENTE ELÉTRICA	277
CONCEITO E PROCESSOS DE ELETRIZAÇÃO E PRINCÍPIOS DA ELETROSTÁTICA	278
LEI DE COULOMB	279
CAMPO, TRABALHO E POTENCIAL ELÉTRICOS.....	279
LINHAS DE CAMPO	280
SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS E LEI DE GAUSS.....	281
PODER DAS PONTAS.....	281
BLINDAGEM	282
CAPACIDADE ELÉTRICA.....	282
CAPACITORES E ASSOCIAÇÕES	283
DIFERENÇA DE POTENCIAL E TRABALHO NUM CAMPO ELÉTRICO	283
CORRENTES CONTÍNUA E ALTERNADA	284
CONCEITO, EFEITOS E TIPOS, CONDUTORES E ISOLANTES	284
EFEITO JOULE.....	284
LEIS DE OHM E RESISTORES	284
RESISTÊNCIA ELÉTRICA E RESISTIVIDADE.....	285
ASSOCIAÇÕES	286
PONTE DE WHEATSTONE	286
RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS ELÉTRICAS: TENSÃO, CORRENTE, POTÊNCIA E ENERGIA.....	287
GERADORES E RECEPTORES, ASSOCIAÇÃO DE GERADORES.....	287
MEDIDORES ELÉTRICOS	288
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE CIRCUITOS: SÍMBOLOS CONVENCIONAIS	289
ÍMÃS PERMANENTES	290
LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO.....	290
FORÇA MAGNÉTICA.....	290
CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE E BÚSSOLA	291

CLASSIFICAÇÃO DAS SUBSTÂNCIAS MAGNÉTICAS.....	291
CAMPO MAGNÉTICO: CONCEITO E APLICAÇÕES.....	291
CAMPO MAGNÉTICO GERADO POR CORRENTE ELÉTRICA EM CONDUTORES RETILÍNEOS E ESPIRAIS.....	292
LEI DE BIOT-SAVART.....	292
LEI DE AMPÈRE.....	292
ELETROÍMÃ.....	293
FORÇA MAGNÉTICA SOBRE CARGAS ELÉTRICAS E CONDUTORES PERCORRIDOS POR CORRENTE ELÉTRICA.....	293
INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA.....	294
LEI DE FARADAY E LEI DE LENZ.....	294
TRANSFORMADORES.....	295
CIRCUITOS ELÉTRICOS.....	296
POTÊNCIA E CONSUMO DE ENERGIA EM DISPOSITIVOS ELÉTRICOS.....	297
■ OSCILAÇÕES, ONDAS, ÓPTICA.....	297
PULSOS E ONDAS.....	297
PERÍODO, FREQUÊNCIA E CICLO.....	299
ONDAS PERIÓDICAS: CONCEITO, NATUREZA E TIPOS.....	299
■ PROPAGAÇÃO: RELAÇÃO ENTRE VELOCIDADE, FREQUÊNCIA E COMPRIMENTO DE ONDA.....	301
■ ONDAS EM DIFERENTES MEIOS DE PROPAGAÇÃO.....	303
■ FEIXES E FRENTES DE ONDAS.....	303
FENÔMENOS ONDULATÓRIOS.....	309
Princípio de Huygens.....	309
Reflexão.....	309
Refração.....	309
Difração.....	310
Princípio da Superposição, Polarização e Interferência.....	311
MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (M.H.S.).....	311
ONDAS SONORAS: PROPRIEDADES, PROPAGAÇÃO E QUALIDADES DO SOM.....	315
TUBOS SONOROS.....	317
EFEITO DOPPLER.....	319
■ PRINCÍPIOS DA ÓPTICA GEOMÉTRICA, TIPOS DE FONTES E MEIOS DE PROPAGAÇÃO.....	321

SOMBRA E PENUMBRA.....	323
REFLEXÃO: CONCEITO, LEIS E ESPELHOS PLANOS E ESFÉRICOS	324
REFRAÇÃO: CONCEITO, LEIS, LÂMINAS, PRISMAS E LENTES	330
Formação de Imagens.....	332
INSTRUMENTOS ÓPTICOS SIMPLES.....	337
Olho Humano (Principais Defeitos da Visão)	337
■ CALOR E FENÔMENOS TÉRMICOS.....	337
CALOR E TEMPERATURA.....	337
ESCALAS TERMOMÉTRICAS.....	338
TRANSFERÊNCIA DE CALOR E EQUILÍBRIO TÉRMICO	339
Condução do Calor	339
DILATAÇÃO TÉRMICA	340
CAPACIDADE CALORÍFICA E CALOR ESPECÍFICO.....	342
MUDANÇAS DE ESTADO FÍSICO.....	343
CALOR LATENTE DE TRANSFORMAÇÃO.....	343
COMPORTAMENTO DE GASES IDEAIS (EQUAÇÃO DE CLAPEYRON).....	344
LEIS DA TERMODINÂMICA	345
MÁQUINAS TÉRMICAS	347
CICLO DE CARNOT.....	348
■ MATÉRIA E RADIAÇÃO	349
MODELOS ATÔMICOS E AS PROPRIEDADES DOS MATERIAIS (TÉRMICAS, ELÉTRICAS, MAGNÉTICAS, ETC.)	349
ESPECTRO ELETROMAGNÉTICO (DAS ONDAS DE RÁDIO AOS RAIOS γ) E SUAS TECNOLOGIAS (RADAR, RÁDIO, FORNO DE MICRO-ONDAS, TOMOGRAFIA, ETC.).....	351
RADIAÇÕES E MEIOS MATERIAIS	351
Fotocélulas.....	351
Emissão e Transmissão de Luz	352
Telas de Monitores	352
Radiografias	352
POTÊNCIAS DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS	353
NATUREZA CORPUSCULAR DAS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS	353
TRANSFORMAÇÕES NUCLEARES E RADIOATIVIDADES	354

MATEMÁTICA

ÁLGEBRA I

FUNÇÕES: DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Mesmo que você ainda não saiba o conceito de função, você já lidou com elas no seu cotidiano, direta ou indiretamente, seja no cálculo do valor de uma corrida de táxi, seja no cálculo do valor de uma conta de energia. As funções ocorrem quando há a associação entre dois conjuntos, onde todo elemento de um conjunto tem correspondência com um elemento do outro, ou seja, um elemento está em função do outro.

As funções podem ser representadas tanto em tabelas quanto em fórmulas. Para entender melhor essa representação, vamos tomar como exemplo o cálculo do valor de uma corrida de táxi. Nesse cálculo, temos a chamada bandeira, isto é, um valor fixo para qualquer corrida, que será somado com o produto da distância percorrida pelo valor da quilometragem. Se um taxista tem a bandeira 10 e o valor da quilometragem é 3, podemos montar uma fórmula onde o valor pago (VP) é igual ao produto de 3 pela distância percorrida (D) somado com 10, resultando em: $VP = 3 \cdot D + 10$. Para representar essa função em formato de tabela, precisamos assumir valores para D, já que VP depende diretamente dele, ficando:

DISTÂNCIA (D)	10	15	20	30
VALOR PAGO (VP)	40	55	70	100

Dessa maneira, a definição de **função** é: uma relação f entre um conjunto A e um conjunto B, denotada por $f = A \rightarrow B$, onde, para cada x pertencente a A, existe um **único** y no conjunto B.

Na figura abaixo, observa-se que as relações f e g não são funções, pois, para f , nem todo elemento de A tem um respectivo em B. Já para a relação g , não se tem todo elemento de A com um único respectivo em B. A relação h : esta, sim, é uma função, visto que para **todo** elemento de A existe um **único** respectivo em B.

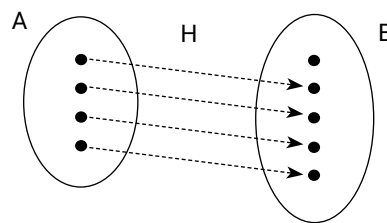
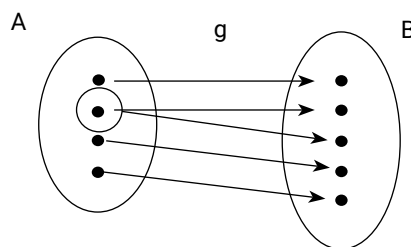
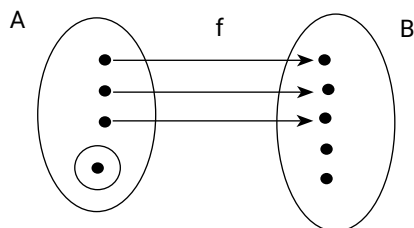


Figura 1. Diagrama de Venn para relações: f , g e h , entre dois conjuntos A e B.

Geralmente, existe uma expressão $Y = f(x)$ que expressa todos os elementos da relação, assim, para representar uma função f , de A em B, segundo uma lei de formação, tem-se:

$$f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$$

ou

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto f(x)$$

Por exemplo, a função f , que associa a cada número real x o número $2x$, é expressa da seguinte forma:

$$f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = 2x\}$$

ou

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto 2x$$

FUNÇÕES DEFINIDAS POR FÓRMULAS

Vamos representar a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = 3x$. O “ \mathbb{R} ”, nesta situação, é o conjunto dos números reais, portanto a função $f(x)$ tem como Domínio e Contradomínio todos os números reais.

Deve-se lembrar de que $f(x)$ é igual a “ y ”, que é a nossa imagem. Para a lei de formação, entendemos que “ x ” assumirá alguns valores que resultará valores “ y ” da função. Tudo isso é regido da seguinte maneira:

$$f(x) = 3x$$

Quando “ x ” for igual a 1, por exemplo, é preciso substituir o valor dele na função. Vejamos:

$$f(1) = 3 \cdot 1 = 3$$

Afirmamos, então, que, para $x = 1$, a função tem resultado 3.

Funções Pares e Ímpares

- **Funções pares:** são aquelas em que $f(-x)=f(x)$, ou seja, quando “x” assume valores opostos e gera a mesma imagem. Vejamos:

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$f(3) = 3^2 - 4 = 5$$

$$f(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$$

- **Funções ímpares:** são aquelas para as quais $f(x) = -f(x)$. Ou seja, quando “x” assume valores opostos e gera imagens opostas. Veja:

$$f(x) = 2x$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$f(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$$

DOMÍNIO, IMAGEM E CONTRADOMÍNIO

O **domínio** (D) é formado por todos os possíveis elementos do conjunto A ($D = A$) e, nos gráficos, são os valores que a abscissa (eixo x) pode assumir. O **contradomínio** (CD = B) é formado por todos os elementos do conjunto B, que são formados por todos os valores que as ordenadas (eixo y) podem assumir. A imagem (Im) é formada por todos os elementos do contradomínio que se relacionam com algum elemento do domínio. Assim, quando todo elemento x, pertencente a A, está associado a um elemento y, pertencente a B, dizemos que y é a imagem de x e denotamos por $y = f(x)$.

Conjunto imagem ou **imagem** de uma função é o subconjunto formado pelos elementos do contradomínio que possuem algum elemento correspondente no domínio.

Atente-se: se tivermos um elemento do conjunto de partida (A) que não tiver seu respectivo valor em relação ao conjunto (B), então essa relação **não será função**.

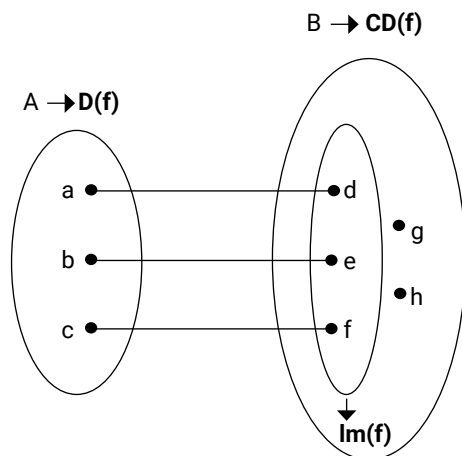


Figura 2. Diagrama A e B, em relação ao domínio (D), contradomínio (CD) e imagem (Im).

FUNÇÕES INJETORA, SOBREJETORA E BIJETORA

As **funções injetoras** são funções tais que os distintos elementos do domínio se relacionam com distintos elementos da imagem, ou seja, dois elementos do domínio não podem ter a mesma imagem (figura 3a). Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x$ é injetora, visto que, para $x_1 \neq x_2$, tem-se $4x_1 \neq 4x_2$, logo, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

As **funções sobrejetoras** são funções nas quais o seu conjunto imagem (Im) é igual ao contradomínio (CD), isto é, $Im = CD = B$ (figura 3b). Sobre funções em que aconteçam as duas situações ao mesmo tempo, ou seja, seriam funções injetoras e sobrejetoras, dizemos que são **funções bijetoras** (figura 3c).

- Diagrama para funções injetoras:

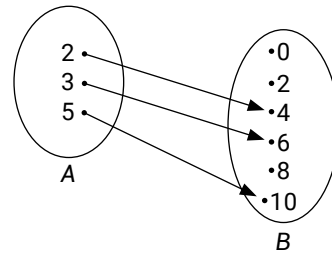


Figura 3a.

- Diagrama para funções sobrejetoras:

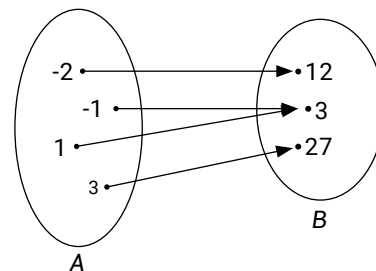


Figura 3b.

- Diagrama para funções bijetoras:

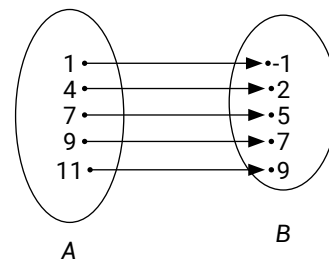


Figura 3c.

FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE

Uma relação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ recebe a denominação de **função constante** quando, a cada elemento de $x \in \mathbb{R}$, associa-se sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$, ou seja, $y = f(x) = c$. O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas (eixo x) passando pelo ponto $(x, y) = (0, c)$ (figura 5). Assim, o conjunto imagem (Im) de f é $Im = \{c\}$.

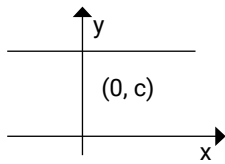


Figura 5. Função constante.

Assim, temos exemplos de funções constantes, como mostra a figura 6.

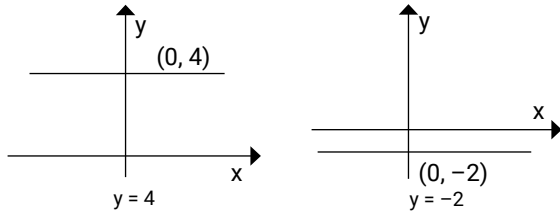


Figura 6. Exemplos de função constante.

Uma função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é dita **função crescente** em um intervalo se para dois valores quaisquer de x_1 e x_2 , pertencentes ao intervalo, onde $x_1 < x_2$ resultam em $f(x_1) < f(x_2)$. Ou seja, quando aumentam os valores de x , os valores de y também aumentam (figura 7a).

Uma função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é dita **função decrescente** em um intervalo se para dois valores quaisquer de x_1 e x_2 , pertencentes ao intervalo, onde $x_1 < x_2$ resultam em $f(x_1) > f(x_2)$. Ou seja, quando aumentam os valores de x , os valores de y diminuem (figura 7b).

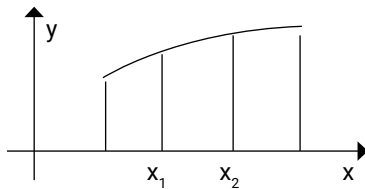


Figura 7a. Exemplo de função crescente.

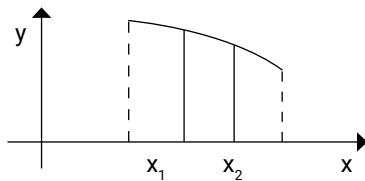


Figura 7b. Exemplo de função decrescente.

I FUNÇÃO COMPOSTA

Trata-se de uma função formada por duas ou mais funções juntas. Vejamos um exemplo:

Temos $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x + 2$ e queremos encontrar as funções compostas: $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

Para que entenda como resolver, usaremos, a princípio, $f(g(x))$. A primeira coisa a ser levada em conta é que, no lugar de "x" em $f(x)$, temos a função $g(x)$, então é preciso substituir uma pelo valor da outra.

$$f(x+2) = x + 3$$

Agora, vamos substituir "x" por "x+2".

$$f(x+2) = x + 2 + 3$$

$$f(g(x)) = x + 5$$

(aqui está a nossa função composta)

A seguir, repetiremos o processo com $g(f(x))$. Vejamos:

$$g(x+3) = x + 2$$

$$g(x+3) = x + 3 + 2$$

$$g(f(x)) = x + 5$$

(aqui está a nossa função composta)

Dica

$f(g(x))$ é conhecida, também, como $f \circ g(x)$ (lê-se fog de x).

$g(f(x))$ é conhecida, também, como $g \circ f(x)$ (lê-se gof de x).

I FUNÇÃO INVERSA E GRÁFICOS

Uma função $f: A \rightarrow B$, bijetora de A em B , ou seja, distintos elementos do domínio (A) se relacionam com distintos elementos da imagem (Im) e a imagem é igual ao contradomínio, que é igual ao conjunto B ($Im = CD = B$), a relação inversa de f é uma função de $f: B \rightarrow A$, que denominamos de **função inversa** e é denotada por f^{-1} .

Acompanhe o exemplo para ilustrar melhor: uma função $f(x) = 2x - 1$, onde o domínio é dado por $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e o contradomínio e a imagem são dados por $B = \{1, 3, 5, 7\}$, resultando em $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$.

Desta maneira, temos que f é bijetora, visto que $D_f = A$ e a $Im_f = B$. A função inversa de f também é uma função bijetora, visto que para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$ onde $f^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$ $D_{f^{-1}} = B$ e $Im_{f^{-1}} = A$. Logo, a sentença da função inversa de f é definida por:

$$f(x) = y = 2x - 1 \rightarrow 2x = y + 1 \rightarrow x = \frac{y + 1}{2}$$

Logo, se $f = \{(x, y) \in A \cdot B \mid y = 2x - 1\}$, então $f^{-1} = \{(y, x) \in B \cdot A \mid x = \frac{y + 1}{2}\}$.

Na figura 9, vemos os gráficos das funções f e f^{-1} acima. Percebemos, pela figura 9c, que eles são simétricos, em relação à bissetriz nos quadrantes ímpares do plano cartesiano. Para construir o gráfico, basta plotar os pontos (x, y) ou (y, x) das duas funções no plano cartesiano e traçar uma reta.

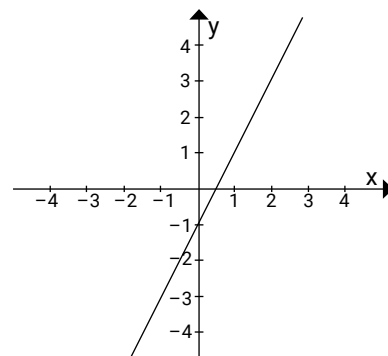


Figura 9a. Função $f(x) = 2x - 1$.

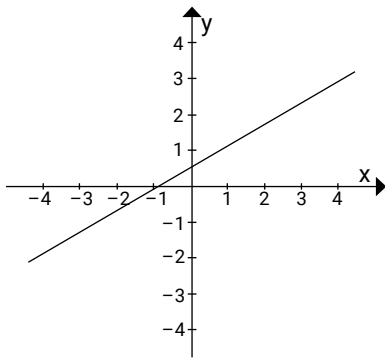


Figura 9b. Função $f^{-1}(x) = \frac{(x + 1)}{2}$.

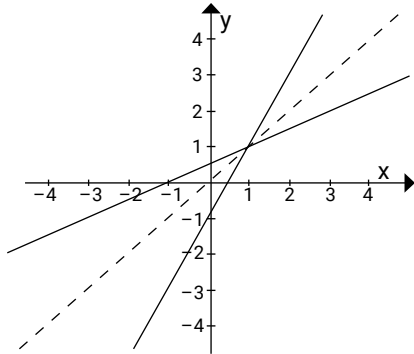


Figura 9c. As duas funções (a e b) mais a bissetriz em pontilhado.

a função afim $f(x) = 2x + 1$, $(x, y) = (0, 1)$ é o ponto onde a reta corta o eixo y; com mais um ponto, pode-se traçar a reta que representa a função $f(x)$. Assim, para $x = 1 \rightarrow y = 3$, ou seja, o ponto $(x, y) = (1, 3)$. Seu gráfico segue na figura 11.

IMPORTANTE!

Uma função afim $f(x) = ax + b$, quando $b = 0$, transforma-se na função linear $f(x) = ax$. Assim, dizemos que uma função linear é um caso particular da função afim.

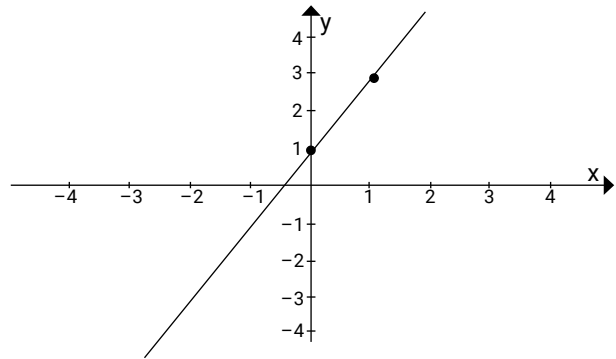


Figura 11. Gráfico da função afim $f(x) = 2x + 1$ e o ponto $(x, y) = (1, 3)$

Uma função afim é **crecente** sempre que o coeficiente angular for **positivo** ($a > 0$) e **decrescente** quando o mesmo for **negativo** ($a < 0$).

I FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

Função Linear e Afim

A **função linear** é uma aplicação de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quando cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ e constante real, ou seja, $f(x) = ax$; $a \neq 0$.

O gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem e liga os pontos $(x, y) = (x, ax)$ no plano cartesiano (figura 10).

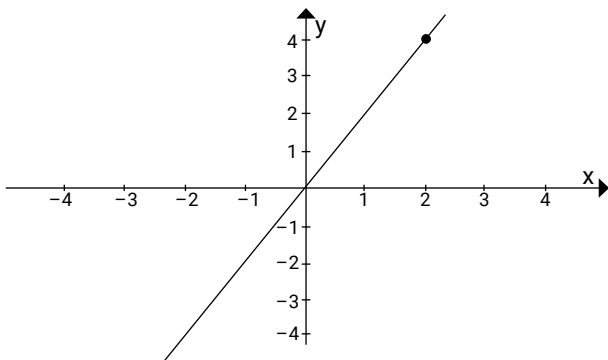


Figura 10. Gráfico da função linear $f(x) = 2x$ e o ponto $(x, y) = (2, 4)$.

A aplicação de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, quando cada $x \in \mathbb{R}$ estiver associado ao elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, a e b constante real, recebe o nome de **função afim**, ou seja, $f(x) = ax + b$; $a \neq 0$, onde a é conhecido como coeficiente angular e b como coeficiente linear.

O gráfico para a função afim, $f(x) = ax + b$, também é uma reta, onde o coeficiente angular (a) indica a inclinação da reta e o coeficiente linear indica o local em que a reta corta o eixo das ordenadas (eixo y). Seja

Sinal da Função Afim

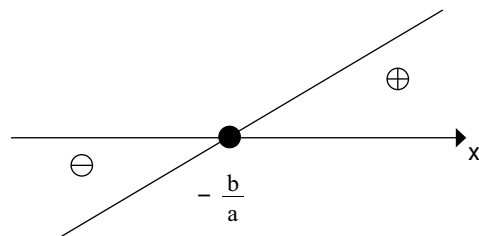
O estudo do sinal de uma função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é encontrar para quais valores de x temos $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$, com $x \in D_f$.

Inicialmente, identificamos onde a função é igual a zero, ou seja, encontramos a raiz da função $y = f(x)$. Para isso, fazemos $y = f(x) = 0$. Para função afim, temos a raiz sendo: $f(x) = ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Agora, teremos dois casos para estudo do sinal da função afim: um quando o coeficiente angular é positivo ($a > 0$); outro, quando é negativo ($a < 0$):

- 1º caso: $a > 0$ (crescente)

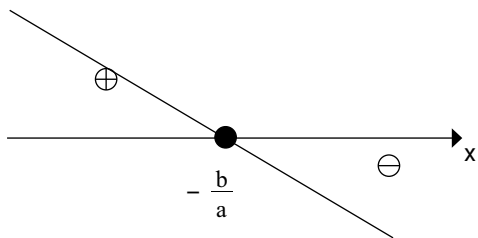
$$\begin{cases} f(x) = ax + b > 0 \rightarrow x > -\frac{b}{a} \\ f(x) = ax + b < 0 \rightarrow x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$



Assim, colocando esses resultados sobre o eixo x e adicionado os sinais, vemos em quais intervalos estão os sinais positivos e negativos da função.

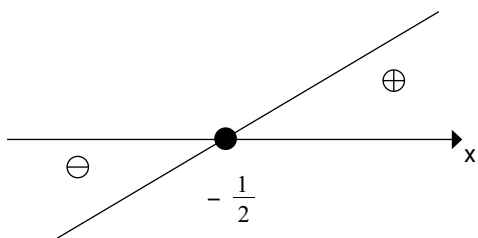
- 2º caso: $a < 0$ (decrecente)

$$\begin{cases} f(x) = ax + b > 0 \rightarrow x < -\frac{b}{a} \\ f(x) = ax + b < 0 \rightarrow x > -\frac{b}{a} \end{cases}$$



Vejam os exemplos: na função $f(x) = 2x + 1$, sua raiz é dada por $2x + 1 = 0 \rightarrow x - \frac{1}{2} = 0$. Como o coeficiente angular é positivo ($a = 2 > 0$), então o estudo de sinal de $f(x)$ será:

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) > 0 \\ x < -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) < 0 \end{cases}$$



I FUNÇÃO QUADRÁTICA

A **função quadrática, ou do 2º grau**, é uma aplicação de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quando cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$. Um exemplo de função quadrática: $f(x) = x^2 - 3x + 2$; $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$.

O gráfico para a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola. Assim, para sua construção são necessários mais que dois pontos, diferentemente do visto anteriormente na construção da reta. Para tal, inicialmente encontram-se os zeros ou as raízes da função, o vértice e o ponto de encontro com o eixo y.

São três coeficientes na função quadrática: a , b e c . O primeiro, (a), indica se a concavidade da parábola está **voltada para cima** ($a > 0$) ou **para baixo** ($a < 0$), já o terceiro, (c), indica onde a parábola corta o eixo das ordenadas (eixo y), ou seja, quando $x = 0$ e $y = c$.

Vamos analisar a função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$ para compreender melhor. Neste caso, $a = 1$, então a parábola terá sua concavidade voltada para cima; e $c = 2$ — a parábola cortará o eixo y nas coordenadas $(0, 2)$. Mais à frente, estudaremos como calcular as raízes e os vértices da função para, assim, construir um gráfico tal como este:

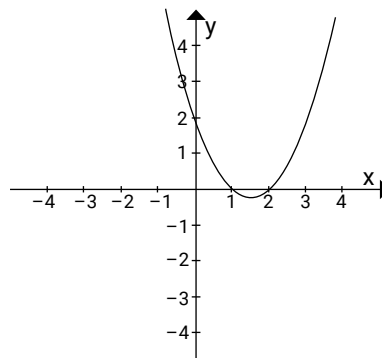


Figura 12. Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$ com vértice

$$(x_v, y_v) = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) \text{ e raízes } (x_1, y) = (1, 0); (x_2, y) = (2, 0).$$

As raízes ou zeros da função quadrática são os valores de x tal que $a f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

Pela forma canônica, tem-se que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$ o discriminante, igualando essa função canônica a zero, chegamos nos valores das raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Usando essa fórmula, chegamos nas raízes da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1,$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 1}{2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

Assim, as raízes para a função quadrática são: $(x_1, y) = (1, 0)$; $(x_2, y) = (2, 0)$.

Atenção! Quando o valor de delta é negativo ($\Delta < 0$), não temos raízes reais, então a parábola não corta o eixo x. Quando o delta é igual a zero ($\Delta = 0$), as duas raízes são iguais, ou seja, teremos uma função quadrática de raiz unitária, fazendo com que a parábola encoste somente uma vez no eixo x. Já para delta positivo ($\Delta > 0$), teremos, então, a situação de duas raízes reais, onde a parábola corta o eixo x em dois lugares.

Sinal da Função Quadrática

O estudo do **sinal de uma função** $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é encontrar para quais valores de x temos $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$, com $x \in D_f$.

Inicialmente, identificamos onde a função é igual a zero, ou seja, encontramos a raiz da função $y = f(x)$. Para isto, fazemos $y = f(x) = 0$. Para função quadrática, vimos que as raízes são: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$.

Agora, teremos um caso para estudo do sinal da função quadrática quando o coeficiente a é positivo ($a > 0$), outro quando é negativo ($a < 0$) e outro, ainda, quando $\Delta > 0$; $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$.

Para $\Delta < 0$, temos:

$a > 0 \rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$a < 0 \rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

No gráfico da função quadrática com $\Delta < 0$, como não existe raiz real, a parábola não corta o eixo x (abscissa).

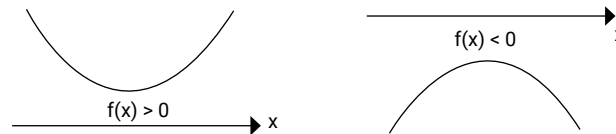


Figura 13.

Para $\Delta = 0$, temos:

$a > 0 \rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$a < 0 \rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

No gráfico da função quadrática com $\Delta = 0$, as raízes são iguais (raiz unitária), logo a parábola corta o eixo x (abscissa) em apenas um ponto. Neste ponto, a $f(x) = 0$.

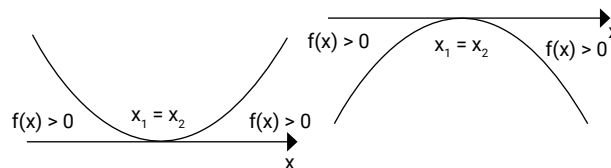


Figura 14.

Para $\Delta > 0$, temos:

$$a > 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x < x_1 \text{ ou } x > x_2\} \\ f(x) < 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 < x < x_2\} \end{cases}$$

$$a < 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 < x < x_2\} \\ f(x) < 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x < x_1 \text{ ou } x > x_2\} \end{cases}$$

No gráfico da função quadrática com $\Delta > 0$, existem as duas raízes reais, logo a parábola corta o eixo x (abscissa) em dois pontos. Nestes pontos, a $f(x) = 0$.

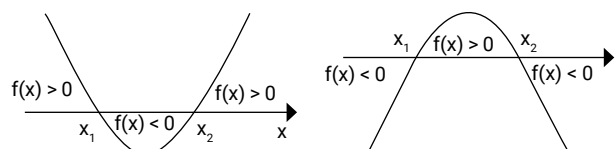


Figura 15.

Logo, no estudo do sinal da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$, temos que $a > 0$, já que $a = 1$, e calculamos o valor do delta, $\Delta = 1 > 0$, e das raízes, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Assim, concluímos para o estudo de sinal:

$$a > 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\} \\ f(x) < 0, \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\} \end{cases}$$

Inequações para Função Quadrática

Seja $a \neq 0$ as **inequações quadráticas** são: $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$.

Resolver a inequação $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ significa encontrar valores de x tal que $f(x)$ seja positiva. O resultado para resolver essa inequação é encontrado no estudo de sinal da função $f(x)$. Assim dependendo dos valores de a e de delta temos algumas combinações de resultados para solução da $f(x) > 0$:

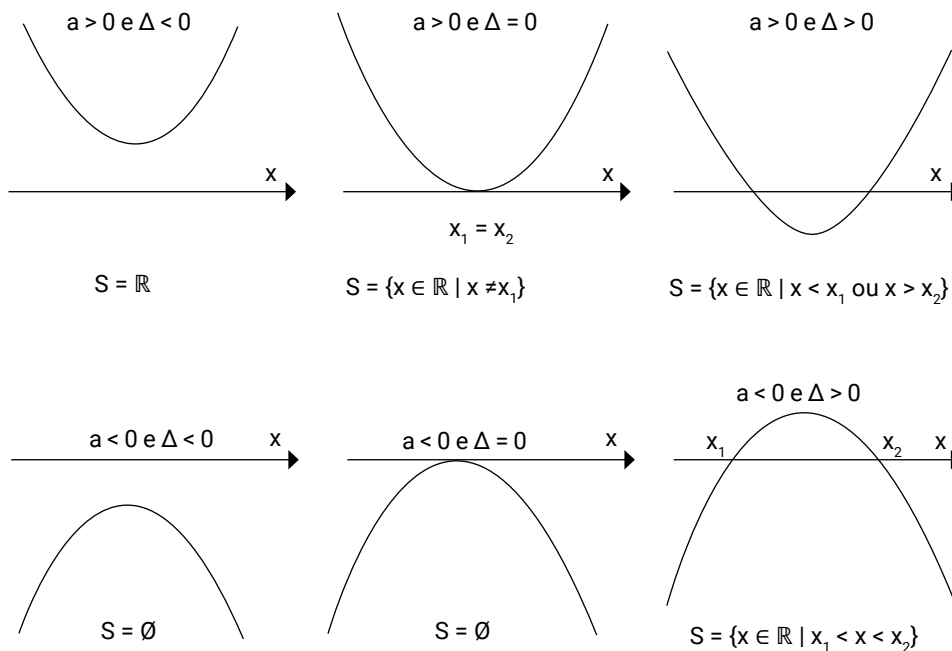


Figura 16.

No caso de **inequação produto** faz-se o estudo de sinal de cada uma das funções quadráticas e define-se a solução de acordo com a regra de sinais do produto de números reais, temos que $(+ \cdot + = +)$; $(- \cdot - = +)$; $(+ \cdot - = -)$, assim, um conjunto solução (S) para uma dessas inequações pode ser encontrada da seguinte forma, seja a inequação produto $f(x) \cdot g(x) > 0$, para o produto ser positivo temos duas situações: $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$.

Então seja a inequação produto $(x^2 - x - 6) \cdot (-x^2 + 2x - 1) > 0$, para achar o conjunto solução primeiro encontra-se as raízes de cada função $f(x) = x^2 - x - 6$ e $g(x) = -x^2 + 2x - 1$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \begin{cases} \Delta_f = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 \\ \Delta_g = (2)^2 - 4(-1)(-1) = 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = -2 \\ x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = 3 \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \begin{cases} x_1 = x_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = 1 \end{cases}$$

Para $f(x) = x^2 - x - 6$, com $\Delta > 0$ e $a > 0$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\} \\ f(x) < 0, \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\} \end{cases}$$

Para $g(x) = -x^2 + 2x - 1$, com $\Delta = 0$ e $a < 0$:

$$g(x) < 0, \forall x \in \mathfrak{R}.$$

Assim, para a inequação produto ser positiva, $f(x) \cdot g(x) = (x^2 - x - 6) \cdot (-x^2 + 2x - 1) > 0$, sabendo que $g(x) < 0$, então a f também deve ser negativa, $f(x) < 0$. Assim, a solução será $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$

No caso de **inequação quociente** faz-se o estudo de sinal de cada uma das funções quadráticas e define-se como solução de acordo com a regra de sinais do quociente de números reais, temos que $(+ \div + = +)$; $(- \div - = +)$; $(+ \div - = -)$, assim, um conjunto solução (S) para uma dessas inequações pode ser encontrada da seguinte forma, seja a inequação quociente $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, para o quociente ser positivo temos duas situações: $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$.

Então seja a inequação quociente $\frac{(2x^2 + x - 1)}{(-x^2 + 2x)} < 0$, para achar o conjunto solução primeiro encontra-se as raízes de cada função $f(x) = 2x^2 + x - 1$ e $g(x) = -x^2 + 2x$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \begin{cases} \Delta_f = (1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9 \\ \Delta_g = (2)^2 - 4(-1)(0) = 4 - 0 = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = -1 \\ x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{-(2) - \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = 2 \\ x_2 = \frac{-(2) + \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = 0 \end{cases}$$

• Para $f(x) = 2x^2 + x - 1$, com $\Delta > 0$ e $a > 0$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \right\} \\ f(x) < 0, \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1}{2} \right\} \end{cases}$$

• Para $g(x) = -x^2 + 2x$, com $\Delta > 0$ e $a < 0$:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\} \\ g(x) < 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\} \end{cases}$$

Portanto, para a inequação quociente ser negativa, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(2x^2 + x - 1)}{(-x^2 + 2x)} > 0$, temos duas situações, a primeira com $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$. Assim, a solução será:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$$

A segunda para $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$. Assim, a solução será:

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1}{2}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\}$$

Logo, a solução das inequações quociente $\frac{(2x^2 + x - 1)}{(-x^2 + 2x)}$ é:

$$S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\}$$

Máximo e Mínimo para Função Quadrática

Dizemos que o número $y_M \in \text{Im}(f)$ é o valor **máximo** ou **mínimo** da função $y = f(x)$ se, somente se, $y_M \geq y$ ou $y_M \leq y$, respectivamente. Ao valor $x_M \in D_f$ tal que $y_M = f(x_M)$ chamamos de ponto máximo ou mínimo da função. Esse ponto também conhecido como **vértice da função quadrática** ou da parábola. Denotamos o vértice como:

$$(x_M, y_M) = V(x_v, y_v) = V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

Ou seja, $V_x = \frac{-b}{2a}$ e $V_y = \frac{-\Delta}{4a}$

Para a função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$, o vértice é dado por:

$$V(x_v, y_v) = V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = V\left(\frac{-(-3)}{2 \cdot 1}, \frac{-((-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2)}{4 \cdot 1}\right) = V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Sendo $a = 1 > 0$, então a concavidade da parábola está voltada para cima e o vértice será ponto de mínimo da função.

IMPORTANTE!

O vértice de uma função quadrática será ponto de **máximo** da função quando $a < 0$ e ponto de **mínimo** da função quando $a > 0$.

FUNÇÃO MODULAR

Definição, Gráfico, Domínio e Imagem

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela associação de cada $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = |x| \in \mathbb{R}$ é denominada **função modular**.

Considerando a definição de módulo de um número real, em que para um número x tem-se $|x| = x$, se $x \geq 0$ ou $|x| = -x$, se $x < 0$, podemos descrever a função modular também da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico para a função modular $f(x) = |x|$ é definido pela junção dos dois gráficos da função de duas sentenças (x e $-x$) e resultará em duas semirretas de origem na raiz da função, $(x, y) = (0, 0)$, ou seja, essas retas são bissetrizes dos primeiro e segundo quadrantes do plano (figura 17).

O domínio da função modular é o conjunto dos reais, ou seja, para todo \mathbb{R} , existe um único $y \in \text{Im}(f)$, sendo que a imagem da função assume somente valores positivos (reais não negativos (\mathbb{R}_+)). Logo, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$. Note, que no gráfico da função as retas ficam acima do eixo x , em que todos os valores para y são positivos (figura 17).

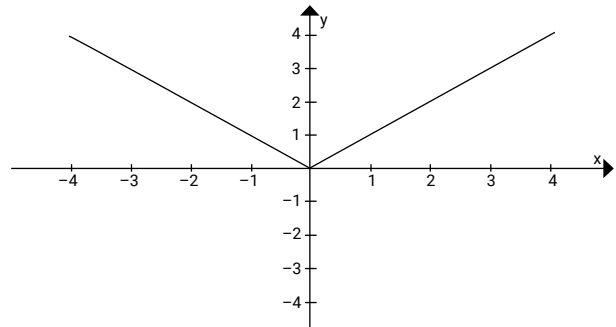


Figura 17. Gráfico da Função modular $f(x) = |x|$.

Para funções modulares com potência quadrática como $f(x) = |x^2 + 4x|$, primeiro divida a função modular em funções definidas por duas sentenças:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x \\ -(x^2 + 4x) \end{cases}$$

As essas duas funções encontramos as suas raízes:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 16$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -4 \\ x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 0 \end{cases}$$

As raízes são -4 e 0 , como para a primeira sentença o valor de $a > 0$, então a concavidade é voltada para cima, e na segunda sentença o valor de $a < 0$, ou seja, concavidade voltada para baixo. Logo, a solução positiva para a função nas duas sentenças segue o intervalo de x abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \leq -4 \text{ e } x \geq 0 \\ -x^2 - 4x, & -4 < x < 0 \end{cases}$$

Dessa forma construímos o gráfico para $x^2 + 4x$ no intervalo abaixo de -4 e acima de 0 e para $-x^2 - 4x$ no intervalo entre -4 e 0 (figura 18).

As raízes das sentenças definidas pela função modular podem também ser chamadas de **ponto (s) de inflexão** da curva (funções quadráticas) ou da reta (funções lineares ou Afim). Inflexão é um ponto sobre uma curva na qual a curvatura troca o sinal, nesse caso indo para o lado positivo do eixo y , pois, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

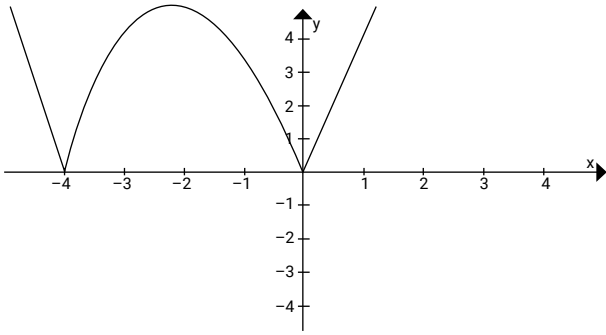


Figura 18. Gráfico da Função Modular $f(x) = |x^2 + 4x|$.

Equações Modulares

Lembrando da definição de módulo de um número real, em que para um número $k > 0$ tem-se $|x| = k \Leftrightarrow x = k$ ou $x = -k$. Então a solução da **equação modular** $|x+2| = 3$ é:

$$|x+2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 3 \rightarrow x = 1 \\ x+2 = -3 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

$$S = \{-5, 1\}$$

Caso tenhamos duas funções modulares, como a equação $|3x+2| = |x-1|$, a solução é dada da seguinte forma:

$$|3x+2| = |x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 = x-1 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \\ 3x+2 = -x+1 \rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$S = \left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4} \right\}$$

E na situação de uma função modular, como a equação $|3x+2| = 2x-3$, a solução é válida para valores de x tal que $2x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2}$. A solução da equação é dada por:

$$|3x+2| = 2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 = 2x-3 \rightarrow x = -5 \\ 3x+2 = -2x+3 \rightarrow x = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Como a solução só é válida para valores de $x \geq \frac{3}{2}$, então a solução para $|3x+2| = 2x-3$ é $S = \{\emptyset\}$.

Inequações Modulares

Uma das propriedades de módulo para números reais, em que para um número $k > 0$ tem-se $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$ e $|x| > k \Leftrightarrow x < -k$ ou $x > k$. Com essa propriedade podemos resolver **inequações modulares** como $|3x-2| < 4$ e sua solução é:

$$|3x-2| < 4 \Leftrightarrow -4 < 3x-2 < 4 \rightarrow -2 < 3x < 6 \rightarrow -\frac{2}{3} < x < 2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < 2\}$$

Mas se a inequação for $|5x+4| \geq 4$, a solução é:

$$|5x+4| \geq 4 \Leftrightarrow 5x+4 \leq -4 \text{ ou } 5x+4 \geq 4 \Leftrightarrow 5x \leq -8 \text{ ou } 5x \geq 0$$

$$5x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{5} \text{ ou } x \geq 0$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{8}{5} \text{ ou } x \geq 0\}$$

Para a inequação $|x+1| + 2x-7 \geq 0$ temos:

$$|x+1| + 2x-7 \geq 0 \rightarrow |x+1| \geq 7-2x$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Para $x \geq -1$ temos $x+1 \geq 7-2x \Leftrightarrow x \geq 2$, com solução:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

Já para $x < -1$ temos $-x-1 \geq 7-2x \Leftrightarrow x \geq 8$, com solução:

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\} = \{\emptyset\}$$

Assim, a solução de $|x+1| + 2x-7 \geq 0$ é dada por:

$$S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} \cup \{\emptyset\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição, Características, Domínio, Imagem e Gráfico

Seja a um número real, tal que seja maior que zero e diferente de 1 ($0 < a \neq 1$ ou $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$), a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número $f(x) = a^x$, é conhecida como **função exponencial**. Assim funções como: 2^x , $(\sqrt{2})^x$ e 10^x são exemplos de funções exponenciais.

Da definição de função exponencial, a partir de algumas características, pode-se notar:

- $x = 0 \rightarrow f(0) = a^0 = 1$;
- $f(x) = a^x$ é crescente para $a > 1$, ou seja, $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- $f(x) = a^x$ é decrescente para $0 < a < 1$, ou seja, $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- $n \in \mathbb{Z}$ e $a > 1$, então $f(n) = a^n > 1$ se, e somente se, $n > 0$;
- $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, então $f(r) = a^r > 1$ se, e somente se, $r > 0$;
- $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r, s \in \mathbb{Q}$, então $a^s > a^r$ se, e somente se, $s > r$;
- $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $\alpha \in \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, então $a^\alpha > 1$ se, e somente se, $\alpha > 0$;
- $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $b \in \mathbb{R}$, então $a^b > 1$ se, e somente se, $b > 0$;
- $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, então $a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 > x_2$;
- $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $b \in \mathbb{R}$, então $a^b > 1$ se, e somente se, $b < 0$;
- $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, então $a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 < x_2$.