Prefeitura Municipal de Osasco do Estado de São Paulo

OSASCO

Auxiliar de Desenvolvimento e Apoio Escolar

NV-002NB-23-PREF-OSASCO-AUX-DES-APOIO

NOVA CONCURSOS

MATEMÁTICA

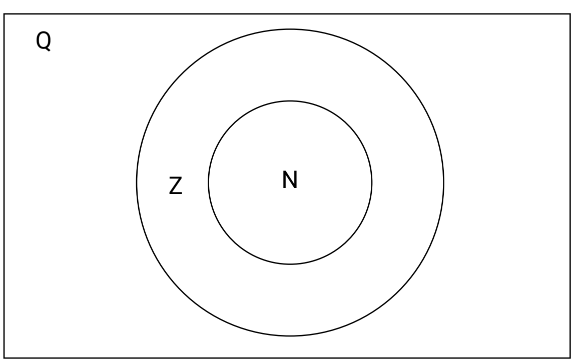
RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO: ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO, MULTIPLICAÇÃO, DIVISÃO, POTENCIAÇÃO OU RADICIAÇÃO COM NÚMEROS RACIONAIS, NAS SUAS REPRESENTAÇÕES FRACIONÁRIA OU DECIMAL

Números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma da divisão (fração) de dois números inteiros. Ou seja, escritos na forma A/B (A dividido por B), onde A e B são números inteiros.

Exemplos: 7/4 e -15/9 são racionais. Veja, também, que os números 87, 321 e 1221 são racionais, pois são divididos pelo número 1.

> **Dica**
>
> Qualquer número natural é também inteiro e todo número inteiro é também racional.

O símbolo desse conjunto é a letra Q e podemos representar por meio de diagramas a relação entre os conjuntos naturais, inteiros e racionais, veja:



Representação Fracionária e Decimal

Há 3 tipos de números no conjunto dos números racionais:

- Frações:

  Ex.: $\frac{8}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{11}$ etc.

- Números decimais.

  Ex.: 1,75

- Dízimas periódicas.

  Ex.: 0,33333...

Operações e Propriedades dos Números Racionais

- Adição de números decimais: segue a mesma lógica da adição comum.

  Ex.: 15,25 + 5,15 = 20,4

- Subtração de números decimais: segue a mesma lógica da subtração comum.

  Ex.: 57,3 – 0,12 = 57,18

- Multiplicação de números decimais: aplicamos o mesmo procedimento da multiplicação comum.

  Ex.: 4,6 · 1,75 = 8,05

- Divisão de números decimais: devemos multiplicar ambos os números (divisor e dividendo) por uma potência de 10 (10, 100, 1000, 10000 etc.) de modo a retirar todas as casas decimais presentes. Após isso, é só efetuar a operação normalmente.

  Ex.: 5,7 ÷ 1,3
  5,7 · 100 = 570
  1,3 · 100 = 130
  570 ÷ 130 = 4,38

Exercite seus conhecimentos analisando os itens que seguem.

1. **(FGV — 2010)** Julgue as afirmativas a seguir:

a) 0,555... é um número racional.

( ) CERTO ( ) ERRADO

Repare que o número 0,555... é uma dízima periódica. Vimos na teoria que as dízimas periódicas são um tipo de número racional. Resposta: Certo.

b) Todo número inteiro tem antecessor.

( ) CERTO ( ) ERRADO

Qualquer número inteiro é possível obter o seu antecessor. Basta subtrair 1 unidade. Veja: o antecessor de 35 é o 34. O antecessor de 0 é -1. E o antecessor de -299 é o -300. Resposta: Certo.

2. **(FCC — 2018)** Os canos de PVC são classificados de acordo com a medida de seu diâmetro em polegadas. Dentre as alternativas, aquela que indica o cano de maior diâmetro é

a) 1/2.
b) 1 ¼.
c) 3/4.
d) 1 ½.
e) 5/8.

Vamos deixar todos na forma decimal. Ou seja, vamos dividir o numerador pelo denominador da fração. Veja:
5/8 = 0,625
½ = 0,5
1 ¼ = 1 + 0,25 = 1,25

MATEMÁTICA

¾ = 0,75
1 ½ = 1 + 0,5 = 1,5
Logo, o maior diâmetro será 1 ½ polegadas, que corresponde a 1,5 polegadas. Resposta: Letra D.

3. **(FCC — 2017)** Sabendo que o número decimal F é 0,8666 . . . , que o número decimal G é 0,7111 . . . e que o número decimal H é 0,4222 . . . , então, o triplo da soma desses três números decimais, F, G e H, é igual a

a) 6,111 . . .
b) 5,888 . . .
c) 6
d) 3
e) 5,98

Podemos resolver de forma aproximada, somando: 0,8666 + 0,7111 + 0,4222 = 1,9999 (aproximadamente 2)
A soma é aproximadamente 3 · 2 = 6. Resposta: Letra C.

4. **(FGV — 2016)** Durante três dias, o capitão de um navio atracado em um porto anotou a altura das marés alta (A) e baixa (B), formando a tabela a seguir.

A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A
1,0	0,3	1,1	0,2	1,3	0,4	1,4	0,5	1,2	0,4	1,0

A maior diferença entre as alturas de duas marés consecutivas foi

a) 1,0.
b) 1,1.
c) 1,2.
d) 1,3.
e) 1,4.

Vamos calcular as diferenças entre os valores da tabela. Veja:
0,3 – 1 = -0,7
1,1 – 0,3 = 0,8
0,2 – 1,1 = -0,9
1,3 – 0,2 = 1,1
0,4 – 1,3 = -0,9
1,4 – 0,4 = 1
0,5 – 1,4 = -0,9
1,2 – 0,5 = 0,7
0,4 – 1,2 = -0,8
1,0 – 0,4 = 0,6
Note que a maior diferença é 1,1. Resposta: Letra D.

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO COM EXPOENTES RACIONAIS

Os números racionais são aqueles que possuem casas decimais finitas ou infinitas com repetição dos números.

A potenciação com expoentes racionais abre precedente para uma interpretação mais detalhada da ideia da radiciação. Já vimos isso anteriormente, mas agora falaremos novamente.

Tomemos $\sqrt{16} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 =} \sqrt{(2 \cdot 2)^2} = 2 \cdot 2 = 2^2$. É possível perceber que, se $2^4 = 4^2 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16} = \sqrt{4} = 2$, melhorando para o uso dos números racionais mais diretamente,

$$\sqrt[4]{16} = (16)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4}{4}} = 2.$$

Agora tomemos $\sqrt{2}$, sendo que $(\sqrt{2})^2 = 2 = \sqrt{4}$, por substituição $\sqrt{2} = \sqrt{\sqrt{4}}$. Para descobrirmos como calcular isso, apenas devemos nos perguntar quantas *n* vezes devemos multiplicar $\sqrt{2}$ por si mesmo para que o resultado seja 4, tal que $\sqrt[n]{b} = \sqrt{2}$. Se a resposta for *n*=4, ela está correta. Vejamos,

$$\sqrt{\sqrt{4}} = (\sqrt{4})^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Acompanhe as operações acima com calma e atenção.

Como raciocinar dessa maneira está longe da praticabilidade em uma prova, vamos resumir isso afirmando que qualquer radiciação de radicando *b* e índice *n* pode ser escrita como uma potência de base *b* e expoente $\frac{1}{n}$.

Voltemos ao primeiro exemplo:

$$\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{1}{2}}$$

Podemos ler esse último termo como 2^4 multiplicado a si mesmo $\frac{1}{2}$ vez, isso pode ser transcrito como:

$$2^{4 \cdot \frac{1}{2}} = 2^2$$

Já no segundo caso, teríamos:

$$\sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{4^{\frac{1}{2}}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4}$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$$

Com essas comparações estabelecidas, podemos definir uma potência de expoentes racionais mais claramente.

Para uma base $b \in \mathbb{R}$, um expoente $m \in \mathbb{Z}$ um índice $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$, uma potência de expoentes racionais é definida como $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$, com $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, como já mostrado acima.

Analise o exercício comentado que segue.

1. **(CPCAR — 2019)** Elisa pretende comprar um computador que custa x reais. Ela possui 70% do valor total do computador e ainda vai ganhar de seus avós uma herança, que será totalmente repartida entre ela e suas irmãs Daniella e Lavínia. Nessa partilha, Elisa recebeu 0,2777... da herança, Daniella, 1200 reais, e Lavínia, $\frac{7}{18}$ da herança. Ao fazer as contas do quanto possuía para comprar o computador, percebeu que ainda lhe faltavam 200 reais para realizar a compra.
O valor do computador é, em reais, tal que o número de divisores naturais de x é

a) 18.
b) 20.
c) 22.
d) 24.

Primeiramente, devemos buscar entender qual será o valor da herança recebida, que será explicitamente necessário para sabermos quanto dinheiro Elisa possui. Sejam E, D e L os valores recebidos por cada *uma das netas Elise, Daniella e Lavínia, respectivamente, e h o valor da herança total.*

$$E + D + L = h$$
$$h \cdot 0{,}2777... + 1.200 + \frac{7}{18} \cdot h = h$$

Para simplificarmos a expressão, devemos encontrar a fração geratriz de 0,2777...

$$0{,}2777... = 0{,}2 + 0{,}0777... = \frac{2}{10} + \frac{7}{90} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$$

Substituindo na equação:

$$h \cdot \frac{5}{18} + 1.200 + \frac{7}{18} \cdot = h$$
$$h \cdot \frac{12}{18} + 1.200 = h$$
$$h \cdot \frac{2}{3} + 1.200 = h$$
$$1.200 = h - h \cdot \frac{2}{3}$$
$$1.200 = \frac{3h - 2h}{3}$$
$$1.200 = \frac{h}{3}$$
$$h = 3.600$$

Como Elisa recebeu $\frac{5}{18}$ da herança, então ela recebeu $5 \cdot \frac{3.600}{18}$ reais. Juntando sua parcela da herança com 70% do valor do computador, ainda lhe faltavam 200 reais, ou seja:

$$0{,}7x + 1.000 = x - 200$$
$$1.000 + 200 = x - 0{,}7x$$
$$1.200 = 0{,}3x$$
$$x = \frac{1200}{0{,}3}$$
$$x = \frac{12.000}{3} = 4.000$$

Portanto, o valor do computador é R$ 4.000,00. Para sabermos a quantidade de divisores naturais, precisamos decompô-lo em fatores primos:

4.000	2
2.000	2
1.000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	

Ou seja, $4.000 = 2^5 \cdot 5^3$. Agora conseguimos calcular o número de divisores ao acrescentarmos uma unidade a cada expoente dos fatores primos distintos e multiplicarmos, ou seja, $(5 + 1)(3 + 1) = 6 \cdot 4 = 24$ divisores naturais. Resposta: Letra D.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Os múltiplos de um número X são aqueles números que podem ser obtidos multiplicando X por outro número natural. Agora observe o seguinte os múltiplos dos números 4 e 6:

M(4) = 4,8,12,16,20,24,28,32,36,...

M(6) = 6,12,18,24,30,36,42,...

Quais são os múltiplos iguais (comuns) entre os números? São eles: 12,24,36. E qual o menor deles? É o número 12.

Sendo assim, o número 12 é o menor múltiplo comum entre 4 e 6, ou seja, o MMC entre 4 e 6 é igual a 12.

Cálculo do MMC por Fatoração Simultânea

Podemos calcular o MMC entre 2 ou mais números, de maneira mais rápida, fazendo a fatoração simultânea dos dois números. Veja:

Ex.: calcule o MMC entre 6 e 8.

6 – 8	2 (aqui devemos colocar o menor número primo)
3 – 4	2 (nesse caso repetimos o nº 3, pois ele não é dividido pelo 2)
3 – 2	2
3 – 1	3
1 – 1	MMC = 2 · 2 · 2 · 3 = 24.

Logo, o MMC (6 e 8) = 24.

Com esse método é possível calcular o MMC entre vários números. Vamos exercitar, dessa vez com mais números. Ex.: calcule o MMC entre os números 10, 12, 20.

10 – 12 – 20	2 (aqui devemos colocar o menor número primo)
5 – 6 – 10	2 (nesse caso repetimos o nº 3, pois ele não é dividido por 2)
5 – 3 – 5	3
5 – 1 – 5	5
1 – 1 – 1	MMC = 2 · 2 · 3 · 5 = 60.

Logo, o MMC (10, 12 e 20) = 60.

Lembre-se de alguns passos para calcular o MMC (fatoração simultânea):

1 – Montar uma coluna para os fatores primos e colunas para cada um dos números;

2 – Começar a divisão dos números pelo menor fator primo (2) e só ir aumentando quando nenhum dos números puder ser dividido;

- se algum dos números não puder ser dividido, basta copiá-lo para a próxima linha;
- o objetivo é fazer com que todos os números cheguem ao valor 1;
- o MMC será a multiplicação dos fatores primos utilizados.

Pensando um pouco além e olhando para os tipos de questões que aparecem nas provas, devemos ter em mente que o enunciado relacionado a MMC sempre trará uma ideia de periodicidade, repetição, ciclo de acontecimentos.

Veja um exemplo:

Na linha de montagem de uma fábrica, há duas luzes de sinalização, sendo que uma delas pisca a cada 20 minutos e a outra pisca a cada 35 minutos. Se às 8 horas da manhã as duas luzes piscaram ao mesmo tempo, isso irá ocorrer novamente às?

Resolução:

Observe "a cada 20 minutos" e "a cada 35 minutos". Aqui temos uma ideia de repetição, pois se por exemplo se a luz que pisca a cada 20 minutos picar às 15h, ela irá piscar novamente depois de 20 minutos, ou seja, 15h20. Depois às 15h40, 16h, etc.

Logo, esse é um tipo clássico de questão sobre MMC.

> **Dica**
>
> Atente-se para as palavras "a cada", "em", "ou" nos enunciados que elas indicam uma ideia de repetição, ciclo e periodicidade.

A seguir, analise alguns exercícios comentados acerca do tema.

1. **(FCC — 2015)** Para um evento promovido por uma determinada empresa, uma equipe de funcionários preparou uma apresentação de slides que deveria transcorrer durante um momento de confraternização. Tal apresentação é composta por 63 slides e cada um será projetado num telão por exatos 10 segundos. Foi ainda escolhida uma música de fundo, com duração de 4min40s para acompanhar a apresentação dos slides. Eles planejam que a música e a apresentação dos slides comecem simultaneamente e "rodem" ciclicamente, sem intervalos, até que ambas finalizem juntas. A fim de estudar a viabilidade desse plano, eles calcularam que a quantidade de vezes que a música teria de tocar até que seu final coincidisse, pela primeira vez depois do início, com final da apresentação seria

a) 5.
b) 42.
c) 12.
d) 35.
e) 9.

Slide = 630 segundos (63·10s)
Música = 280 segundos (4·60s+40s)
MMC

630	280	2
315	140	2
315	70	2
315	35	5
63	7	7
9	1	3
3	1	3
1	1	2·2·2·5·7·3·3 = 2520

Logo, após 2520 segundos a música e o slide irão terminar ao mesmo tempo.
Slide: 2520/630 = 4 voltas
Música: 2520/280 = 9 voltas. Resposta: Letra E.

2. **(VUNESP — 2017)** Um comerciante possui uma caixa com várias canetas e irá colocá-las em pacotinhos, cada um deles com o mesmo número de canetas. É possível colocar, em cada pacotinho, ou 6 canetas, ou 8 canetas ou 9 canetas e, em qualquer dessas opções, não restará caneta alguma na caixa.
Desse modo, o menor número de canetas que pode haver nessa caixa é

a) 70.
b) 66.
c) 64.
d) 72.
e) 68.

MMC (6,8,9):

6 – 8 – 9	2
3 – 4 – 9	2
3 – 2 – 9	2
3 – 1 – 9	3
1 – 1 – 3	3
1 – 1 – 1	2·2·2·3·3 = 72 canetas. Resposta: Letra D.

MÁXIMO DIVISOR COMUM

O máximo divisor comum (MDC ou M.D.C.) corresponde ao maior número divisível entre dois ou mais números inteiros.

Os divisores comuns de 12 e 18 são 1, 2, 3 e 6. Dentre estes, o número maior é o 6. Sendo assim, o número 6 é o máximo divisor comum entre 12 e 18, ou seja, o MDC entre 12 e 18 é igual a 6.

Cálculo do MDC por Fatoração Simultânea

Podemos calcular o MDC entre 2 ou mais números fazendo a fatoração simultânea dos dois números (aqui, é importante ressaltar que a faremos a fatoração até o momento em que o número 1 for quem divide todos os números envolvidos ao mesmo tempo). Veja:

Ex.: calcule o MDC entre 60 e 45.

60 – 45	3 (note que 3 é o número que divide o 60 e o 45 ao mesmo tempo)
20 – 15	5 (note que 5 é o número que divide o 20 e o 15 ao mesmo tempo)
4 – 3	1 (aqui, paramos a fatoração, pois o número 1 é quem divide tudo ao mesmo tempo
	MDC = 3 · 5 · 1 = 15.

Logo, o MDC (60 e 45) = 15.

Passos para calcular o MDC (fatoração simultânea):

- montar uma coluna para os fatores primos e colunas para cada um dos números;
- começar a divisão dos números pelo número que divide todos os números ao mesmo tempo;
- parar a fatoração quando o número 1 for quem divide todo os números ao mesmo tempo;
- o MDC será a multiplicação dos fatores primos utilizados.

NÚMEROS PRIMOS

São números divisíveis somente por 1 e por ele mesmo, distintamente.

Atenção: o número 1 não é primo.

Alguns números primos mais utilizados:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Exemplo: o número 7 é divido apenas por 1 e por ele mesmo, ou seja, é um número primo.

Lembre-se: um número primo tem apenas dois divisores (como dissemos, o 1 e ele mesmo).

RAZÃO E PROPORÇÃO

A razão entre duas grandezas é igual à divisão entre elas. Veja:

$$\frac{2}{5}$$

Ou podemos representar por 2 ÷ 5 (lê-se 2 está para 5).

Já a proporção é a igualdade entre razões. Veja:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Ou podemos representar por 2 ÷ 3 = 4 ÷ 6 (lê-se 2 está para 3 assim como 4 está para 6).

Os problemas mais comuns que envolvem razão e proporção é quando se aplica uma **variável** qualquer dentro da proporcionalidade e se deseja saber o valor dela. Veja o exemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{6} \text{ ou } 2 \div 3 = x \div 6$$

Para resolvermos esse tipo de problema devemos usar a Propriedade Fundamental da razão e proporção: **produto dos meios pelos extremos**.

Meio: 3 e x;

Extremos: 2 e 6.

Logo, devemos fazer a multiplicação entre eles numa igualdade. Observe:

$$3 \cdot X = 2 \cdot 6$$

$$3X = 12$$

$$X = 12 \div 3$$

$$X = 4$$

Lembre-se de que a maioria dos problemas envolvendo esse tema são resolvidos utilizando essa propriedade fundamental. Porém, algumas questões acabam sendo um pouco mais complexas e pode ser útil conhecer algumas propriedades para facilitar. Vamos a elas!

Propriedade das Proporções

- **Somas Externas**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Vamos entender um pouco melhor resolvendo uma questão-exemplo:

Suponha que uma fábrica vai distribuir um prêmio de R$ 10.000 para seus dois empregados (Carlos e Diego). Esse prêmio vai ser dividido de forma proporcional ao tempo de serviço deles na fábrica. Carlos está há 3 anos na fábrica e Diego está há 2 anos. Quanto cada um vai receber?

Resolução:

Primeiro, devemos montar a proporção. Sejam C a quantia que Carlos vai receber e D a quantia que Diego vai receber, temos:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2}$$

Utilizando a propriedade das somas externas:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{C+D}{3+2}$$

Perceba que C + D = 10.000 (as partes somadas), então podemos substituir na proporção:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{C+D}{3+2} = \frac{10.000}{5} = 2.000$$

Aqui cabe uma observação importante!

Esse valor 2.000, que chamamos de "Constante de Proporcionalidade", é que nos mostra o valor real das partes dentro da proporção. Veja:

$$\frac{C}{3} = 2.000$$

$$C = 2000 \cdot 3$$

C = 6.000 (esse é o valor de Carlos)

$$\frac{D}{2} = 2.000$$

$$D = 2.000 \cdot 2$$

D = 4.000 (esse é o valor de Diego)

Assim, Carlos vai receber R$6.000 e Diego vai receber R$ 4.000.

- **Somas Internas**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

É possível, ainda, trocar o numerador pelo denominador ao efetuar essa soma interna, desde que o mesmo procedimento seja feito do outro lado da proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

Vejamos um exemplo:

$$\frac{x}{14-x} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{x+14-x}{x} = \frac{2+5}{2}$$

MATEMÁTICA