

Escola de Especialistas de Aeronáutica

EEAR

Curso de Formação de Sargentos

SUMÁRIO

LÍNGUA PORTUGUESA.....	17
■ TEXTO: INTERPRETAÇÃO DE TEXTOS LITERÁRIOS OU NÃO LITERÁRIOS.....	17
■ GRAMÁTICA	18
FONÉTICA: SÍLABA, SEPARAÇÃO SILÁBICA, ENCONTROS VOCÁLICOS, ENCONTROS CONSONANTAIS, TONICIDADE, ACENTUAÇÃO GRÁFICA; ORTOGRAFIA.....	18
MORFOLOGIA: PROCESSOS DE FORMAÇÃO DE PALAVRAS	20
■ CLASSES DE PALAVRAS	24
SUBSTANTIVO	24
Classificação	24
ADJETIVO: CLASSIFICAÇÃO, FLEXÃO E LOCUÇÃO ADJETIVA.....	26
ADVÉRBIO	28
Classificação	28
Locução Adverbial	29
CONJUNÇÕES	29
Coordenativas	29
Subordinativas	30
VERBO: CLASSIFICAÇÃO (REGULARES, IRREGULARES, DEFECTIVOS, ABUNDANTES, AUXILIARES E PRINCIPAIS)	30
Flexão Verbal (Número, Pessoa, Modo, Tempo, Voz)	32
Conjugação dos Tempos Simples	32
PRONOME: CLASSIFICAÇÃO E EMPREGO	32
PONTUAÇÃO	36
■ SINTAXE	38
CONCORDÂNCIAS VERBAL E NOMINAL	39
REGÊNCIAS VERBAL E NOMINAL	42
CRASE	44
COLOCAÇÃO PRONOMINAL	45
■ PERÍODOS SIMPLES E COMPOSTO	46
TERMOS ESSENCIAIS DA ORAÇÃO.....	46

TERMOS INTEGRANTES DA ORAÇÃO.....	48
TERMOS ACESSÓRIOS DA ORAÇÃO.....	49
PERÍODO COMPOSTO POR COORDENAÇÃO.....	51
PERÍODO COMPOSTO POR SUBORDINAÇÃO	52
ORAÇÕES REDUZIDAS	53
■ TIPOS DE DISCURSO	54
■ ESTILÍSTICA	54
FIGURAS DE LINGUAGEM	54
METÁFORA.....	54
METONÍMIA	55
HIPÉRBOLE	55
PROSOPOPEIA	55
EUFEMISMO	55
ANTÍTESE.....	55
.....	
LÍNGUA INGLESA – NÍVEL INTERMEDIÁRIO.....	61
■ GRAMÁTICA	61
ARTIGOS: DEFINIDO E INDEFINIDO.....	61
SUBSTANTIVOS: GÊNERO, SINGULAR E PLURAL, COMPOSTO, CONTÁVEL E INCONTÁVEL E FORMA POSSESSIVA	63
ADJETIVOS: POSIÇÃO, FORMAÇÃO PELO GERÚNDIO E PELO PARTICÍPIO E GRAU DE COMPARAÇÃO	68
PRONOMES: PESSOAL DO CASO RETO E DO OBLÍQUO, INDEFINIDOS (PRONOMES SUBSTANTIVOS E ADJETIVOS), RELATIVOS, DEMONSTRATIVOS (PRONOMES SUBSTANTIVOS E ADJETIVOS), POSSESSIVOS (PRONOMES SUBSTANTIVOS E ADJETIVOS) E REFLEXIVOS.....	73
PRONOMES E ADVÉRBIOS INTERROGATIVOS	78
DETERMINANTES (DETERMINERS: ALL, MOST, NO, NONE, EITHER, NEITHER, BOTH, ETC.).....	79
QUANTIFICADORES (QUANTIFIERS: A LOT, A FEW, A LITTLE, ETC.)	81
ADVÉRBIOS: FORMAÇÃO, TIPOS E USO	83
NUMERAIS.....	86
PREPOSIÇÕES	88
CONJUNÇÕES.....	92
VERBOS (REGULARES, IRREGULARES E AUXILIARES) E TEMPOS VERBAIS (SIMPLE PRESENT, PRESENT PROGRESSIVE, SIMPLE PAST, PAST PROGRESSIVE, FUTURE E PERFECT TENSES).....	93

MODAL VERBS	107
INFINITIVO E GERÚNDIO	108
MODOS IMPERATIVO E SUBJUNTIVO	109
VOZES DO VERBO: ATIVA, PASSIVA E REFLEXIVA	109
PHRASAL VERBS.....	111
FORMA VERBAL ENFÁTICA	112
QUESTION TAGS E TAG ANSWERS	112
DISCURSO DIRETO E INDIRETO.....	116
ESTRUTURA DA ORAÇÃO: PERÍODO COMPOSTO (CONDICIONAIS, RELATIVAS, APOSITIVAS, ETC.).....	117
PREFIXOS E SUFIXOS.....	119
MARCADORES DO DISCURSO (BY THE WAY, ON THE OTHER HAND, IN ADDITION, IN MY OPINION, ETC.)	120
■ COMPREENSÃO DE TEXTOS.....	122
TEXTOS DE ASSUNTOS TÉCNICOS E GERAIS.....	123
LÍNGUA INGLESA – NÍVEL BÁSICO	133
■ NOÇÕES BÁSICAS DE INGLÊS.....	133
MATEMÁTICA.....	139
■ ÁLGEBRA I.....	139
FUNÇÕES: DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO.....	139
FUNÇÕES DEFINIDAS POR FÓRMULAS	139
DOMÍNIO, IMAGEM E CONTRADOMÍNIO	140
FUNÇÕES INJETORAS, SOBREJETORA E BIJETORA	140
FUNÇÃO CRESCENTE, FUNÇÃO DECRESCENTE E FUNÇÃO COMPOSTA.....	140
FUNÇÃO INVERSA E GRÁFICOS	141
FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU E FUNÇÃO QUADRÁTICA	142
FUNÇÃO MODULAR	147
FUNÇÃO EXPONENCIAL	149
FUNÇÃO LOGARÍTMICA.....	150
RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES E SISTEMAS	154
SEQUÊNCIAS.....	155
PROGRESSÃO ARITMÉTICA	155

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA.....	157
■ GEOMETRIA PLANA	158
ÂNGULOS	158
POLÍGONOS	161
Definição, Elementos e Propriedades.....	161
TRIÂNGULOS	162
Condições de Existência, Elementos, Classificação e Propriedades	162
Congruência	163
Bissetriz	163
Altura.....	164
Pontos Notáveis e Mediana	164
Semelhança.....	165
Relações Métricas	166
QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS: DEFINIÇÕES, PROPRIEDADES, BASE MÉDIA E ÁREAS.....	167
CÍRCULO E SUAS PARTES: CONCEITOS, ÁREAS E CIRCUNFERÊNCIA: DEFINIÇÕES E ELEMENTOS	170
Ângulos na Circunferência	170
SEGMENTOS TANGENTES	172
POTÊNCIA DE PONTO	173
Posições Relativas de Reta e Circunferência.....	173
COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA	174
■ TRIGONOMETRIA.....	174
RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	174
ARCOS E ÂNGULOS EM GRAUS E RADIANOS	175
RELAÇÕES DE CONVERSÃO	176
CICLO TRIGONOMÉTRICO	176
ARCOS CÔNGRUOS E SIMÉTRICOS	177
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	178
RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	184
RELAÇÕES E IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS	184
FÓRMULAS DE ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO, DUPLICAÇÃO E BISSECÇÃO DE ARCOS.....	185
EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	188
LEIS DOS SENOS E DOS COSSENOS	190
■ ÁLGEBRA II.....	191
MATRIZES	191

Conceitos.....	191
Igualdade.....	193
Operações	193
PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES	195
SISTEMAS LINEARES.....	197
ANÁLISE COMBINATÓRIA	201
FATORIAL	201
Princípio Fundamental da Contagem.....	202
Arranjos	203
Permutações Simples.....	204
Combinações	204
PROBABILIDADES	204
■ ESTATÍSTICA.....	209
CONCEITOS.....	209
POPULAÇÃO E AMOSTRA	210
VARIÁVEL	213
TABELAS	214
GRÁFICOS	217
Histograma.....	218
MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA.....	218
Moda.....	218
Média	219
Tipos de Frequências	222
Mediana.....	222
■ GEOMETRIA ESPACIAL	223
POLIEDRO: CONCEITOS E PROPRIEDADES.....	223
PRISMA: CONCEITOS, PROPRIEDADES, DIAGONAIS, ÁREAS E VOLUMES	225
PIRÂMIDE: CONCEITOS, ÁREAS E VOLUMES.....	226
CILINDRO: CONCEITOS, ÁREAS E VOLUMES	227
CONE: CONCEITOS, ÁREAS E VOLUMES	228
ESFERA: CONCEITOS, ÁREAS E VOLUMES.....	230
■ GEOMETRIA ANALÍTICA	231
ESTUDO ANALÍTICO DO PONTO	231
Ponto Médio e Condição de Alinhamento de Três Pontos	231
Cálculo do Baricentro	231

Distância Entre Dois Pontos.....	232
Área do Triângulo.....	232
ESTUDO ANALÍTICO DA RETA	232
Equação Geral e Equação Reduzida.....	232
Equação Segmentária.....	233
Posição entre duas Retas.....	233
Paralelismo e Perpendicularismo de Retas	233
Ângulo entre duas Retas	234
ESTUDO ANALÍTICO DA CIRCUNFERÊNCIA	234
Equações.....	234
Posições Relativas entre Ponto e Circunferência.....	235
Entre Reta e Circunferência e entre duas Circunferências.....	235
■ ÁLGEBRA III	237
NÚMEROS COMPLEXOS	237
Conceitos.....	237
Conjugado	237
Igualdade.....	237
Operações	237
Potências de i	238
Representação no Plano de Argand-Gauss e Argumento.....	239
Módulo.....	239
Forma Trigonométrica e Operações na Forma Trigonométrica	239
POLINÔMIOS.....	242
Conceito.....	242
Grau.....	242
Valor Numérico	242
Polinômio Nulo	243
Identidade e Operações.....	243
Equações Polinomiais: Conceitos	244
Teorema Fundamental da Álgebra - Teorema da Decomposição	244
Multiplicidade de uma Raiz	245
Raízes Complexas	245
Relações de Girard.....	245
FÍSICA	251
■ CONCEITOS BÁSICOS E FUNDAMENTAIS.....	251
NOTAÇÃO CIENTÍFICA	251
NOÇÕES DE ORDEM DE GRANDEZA.....	251

Observações e Mensurações: Representação de Grandezas Físicas como Grandezas Mensuráveis....	252
SISTEMAS DE UNIDADES.....	252
GRÁFICOS E VETORES	253
CONCEITUAÇÃO DE GRANDEZAS VETORIAIS E ESCALARES	253
OPERAÇÕES BÁSICAS COM VETORES; COMPOSIÇÃO E DECOMPOSIÇÃO DE VETORES	253
■ O MOVIMENTO, O EQUILÍBRIO E A DESCOBERTA DAS LEIS FÍSICAS	255
GRANDEZAS FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA: TEMPO, ESPAÇO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO	255
DESCRIÇÕES DO MOVIMENTO E SUA INTERPRETAÇÃO: QUANTIFICAÇÃO DO MOVIMENTO E SUA DESCRIÇÃO MATEMÁTICA E GRÁFICA	256
■ CASOS ESPECIAIS DE MOVIMENTOS E SUAS REGULARIDADES OBSERVÁVEIS.....	257
MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME (M.R.U.): CONCEITUAÇÃO E EQUAÇÃO HORÁRIA.....	257
MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (M.R.U.V.): CONCEITO, EQUAÇÕES HORÁRIAS E DE TORRICELLI	258
QUEDA LIVRE E ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE	259
LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS	259
MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME (M.C.U.)	260
FORÇA E VARIAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO	261
LEIS DE NEWTON	261
Conceito de Inércia, Sistemas de Referência Inerciais e não Inerciais	261
LEI DE HOOKE	263
CENTRO DE MASSA.....	263
CENTRO DE GRAVIDADE E A IDEIA DE PONTO MATERIAL	264
MASSA E QUANTIDADE DE MOVIMENTO (MOMENTO LINEAR).....	265
TEOREMA DO IMPULSO E COLISÕES	265
LEI DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO (MOMENTO LINEAR)	266
Conceito de Forças Externas e Internas.....	266
MOMENTO DE UMA FORÇA (TORQUE)	266
CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO DE PONTO MATERIAL E DE CORPOS EXTENSOS	267
FORÇA DE ATRITO	267
FORÇA NORMAL DE CONTATO E TRAÇÃO	268
PRESSÃO E DENSIDADE.....	269
PRESSÃO ATMOSFÉRICA E EXPERIÊNCIA DE TORRICELLI.....	270
PRINCÍPIOS DE PASCAL, ARQUIMEDES (EMPUXO) E STEVIN: CONDIÇÕES DE FLUTUAÇÃO, RELAÇÃO ENTRE DIFERENÇA DE NÍVEL E PRESSÃO HIDROSTÁTICA	271

Princípio de Arquimedes (Empuxo)	272
■ ENERGIA, TRABALHO E POTÊNCIA.....	272
TRABALHO	272
ENERGIA	273
POTÊNCIA	273
RENDIMENTO.....	273
ENERGIA POTENCIAL E ENERGIA CINÉTICA	273
CONSERVAÇÃO DE ENERGIA MECÂNICA	274
DISSIPAÇÃO DE ENERGIA	274
FORÇAS CONSERVATIVAS E DISSIPATIVAS.....	275
■ MECÂNICA E O FUNCIONAMENTO DO UNIVERSO.....	275
FORÇA PESO	275
ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL.....	275
LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL	275
LEIS DE KEPLER E OS MOVIMENTOS DE CORPOS CELESTES.....	276
■ FENÔMENOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS	277
CARGA ELÉTRICA	277
CORRENTE ELÉTRICA	277
CONCEITO E PROCESSOS DE ELETRIZAÇÃO E PRINCÍPIOS DA ELETROSTÁTICA	278
LEI DE COULOMB	279
CAMPO, TRABALHO E POTENCIAL ELÉTRICOS.....	279
LINHAS DE CAMPO	280
SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS E LEI DE GAUSS.....	281
Superfícies Equipotenciais.....	281
PODER DAS PONTAS.....	281
BLINDAGEM	282
CAPACIDADE ELÉTRICA.....	282
CAPACITORES E ASSOCIAÇÕES	283
DIFERENÇA DE POTENCIAL E TRABALHO NUM CAMPO ELÉTRICO	283
CORRENTES CONTÍNUA E ALTERNADA	284
CONCEITO, EFEITOS E TIPOS, CONDUTORES E ISOLANTES	284
EFEITO JOULE.....	284

LEIS DE OHM, RESISTORES E ASSOCIAÇÕES E PONTE DE WHEATSTONE.....	284
RESISTÊNCIA ELÉTRICA E RESISTIVIDADE.....	285
RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS ELÉTRICAS: TENSÃO, CORRENTE, POTÊNCIA E ENERGIA.....	286
GERADORES E RECEPTORES, ASSOCIAÇÃO DE GERADORES.....	286
MEDIDORES ELÉTRICOS.....	287
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE CIRCUITOS: SÍMBOLOS CONVENCIONAIS.....	288
IMÃS PERMANENTES.....	289
LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO.....	289
FORÇA MAGNÉTICA.....	289
CAMPO MAGNÉTICO TERRESTRE E BÚSSOLA.....	290
CLASSIFICAÇÃO DAS SUBSTÂNCIAS MAGNÉTICAS.....	290
CAMPO MAGNÉTICO: CONCEITO E APLICAÇÕES.....	290
CAMPO MAGNÉTICO GERADO POR CORRENTE ELÉTRICA EM CONDUTORES RETILÍNEOS E ESPIRAIS.....	291
LEI DE BIOT-SAVART.....	291
LEI DE AMPÈRE.....	291
ELETROÍMÃ.....	292
FORÇA MAGNÉTICA SOBRE CARGAS ELÉTRICAS E CONDUTORES PERCORRIDOS POR CORRENTE ELÉTRICA.....	292
INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA.....	293
LEI DE FARADAY E LEI DE LENZ.....	294
TRANSFORMADORES.....	294
CIRCUITOS ELÉTRICOS.....	295
POTÊNCIA E CONSUMO DE ENERGIA EM DISPOSITIVOS ELÉTRICOS.....	296
■ OSCILAÇÕES, ONDAS, ÓPTICA.....	296
PULSOS E ONDAS.....	296
PERÍODO, FREQUÊNCIA E CICLO.....	298
ONDAS PERIÓDICAS: CONCEITO, NATUREZA E TIPOS.....	298
■ PROPAGAÇÃO: RELAÇÃO ENTRE VELOCIDADE, FREQUÊNCIA E COMPRIMENTO DE ONDA.....	299
Relação Importante entre Frequência e Período.....	300
■ ONDAS EM DIFERENTES MEIOS DE PROPAGAÇÃO.....	301
■ FEIXES E FRENTES DE ONDAS.....	302
FENÔMENOS ONDULATÓRIOS.....	307

Princípio de Huygens.....	307
Reflexão.....	308
Refração.....	308
Difração.....	309
Princípio da Superposição, Polarização e Interferência.....	310
MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES (M.H.S.).....	310
ONDAS SONORAS: PROPRIEDADES, PROPAGAÇÃO E QUALIDADES DO SOM	314
TUBOS SONOROS.....	316
EFEITO DOPPLER.....	317
■ PRINCÍPIOS DA ÓPTICA GEOMÉTRICA, TIPOS DE FONTES E MEIOS DE PROPAGAÇÃO	319
SOMBRA E PENUMBRA.....	322
REFLEXÃO: CONCEITO, LEIS E ESPELHOS PLANOS E ESFÉRICOS	323
REFRAÇÃO: CONCEITO, LEIS, LÂMINAS, PRISMAS E LENTES	330
Formação de Imagens.....	332
INSTRUMENTOS ÓPTICOS SIMPLES.....	336
Olho Humano (Principais Defeitos da Visão)	337
■ CALOR E FENÔMENOS TÉRMICOS.....	337
CALOR E TEMPERATURA.....	337
ESCALAS TERMOMÉTRICAS.....	338
TRANSFERÊNCIA DE CALOR E EQUILÍBRIO TÉRMICO	338
Condução do Calor	339
DILATAÇÃO TÉRMICA	340
CAPACIDADE CALORÍFICA E CALOR ESPECÍFICO	342
Calor Específico	342
MUDANÇAS DE ESTADO FÍSICO E CALOR LATENTE DE TRANSFORMAÇÃO	342
COMPORTAMENTO DE GASES IDEAIS (EQUAÇÃO DE CLAPEYRON).....	344
LEIS DA TERMODINÂMICA	344
MÁQUINAS TÉRMICAS	346
CICLO DE CARNOT.....	347
■ MATÉRIA E RADIAÇÃO	349
MODELOS ATÔMICOS E AS PROPRIEDADES DOS MATERIAIS (TÉRMICAS, ELÉTRICAS, MAGNÉTICAS, ETC.)	349
ESPECTRO ELETROMAGNÉTICO (DAS ONDAS DE RÁDIO AOS RAIOS γ) E SUAS TECNOLOGIAS (RADAR, RÁDIO, FORNO DE MICRO-ONDAS, TOMOGRAFIA, ETC.).....	350

RADIAÇÕES E MEIOS MATERIAIS (FOTOCÉLULAS, EMISSÃO E TRANSMISSÃO DE LUZ, TELAS DE MONITORES, RADIOGRAFIAS)	351
POTÊNCIAS DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS	352
NATUREZA CORPUSCULAR DAS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS	352
TRANSFORMAÇÕES NUCLEARES E RADIOATIVIDADES	353

MATEMÁTICA

ÁLGEBRA I

FUNÇÕES: DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Mesmo que você ainda não saiba o conceito de função, você já lidou com elas no seu cotidiano, direta ou indiretamente, seja no cálculo do valor de uma corrida de táxi, seja no cálculo do valor de uma conta de energia. As funções ocorrem quando há a associação entre dois conjuntos, onde todo elemento de um conjunto tem correspondência com um elemento do outro, ou seja, um elemento está em função do outro.

As funções podem ser representadas tanto em tabelas quanto em fórmulas. Para entender melhor essa representação, vamos tomar como exemplo o cálculo do valor de uma corrida de táxi. Nesse cálculo, temos a chamada bandeira, isto é, um valor fixo para qualquer corrida, que será somado com o produto da distância percorrida pelo valor da quilometragem. Se um taxista tem a bandeira 10 e o valor da quilometragem é 3, podemos montar uma fórmula onde o valor pago (VP) é igual ao produto de 3 pela distância percorrida (D) somado com 10, resultando em: $VP = 3 \cdot D + 10$. Para representar essa função em formato de tabela, precisamos assumir valores para D, já que VP depende diretamente dele, ficando:

DISTÂNCIA (D)	10	15	20	30
VALOR PAGO (VP)	40	55	70	100

Dessa maneira, a definição de **função** é: uma relação f entre um conjunto A e um conjunto B, denotada por $f = A \rightarrow B$, onde, para cada x pertencente a A, existe um **único** y no conjunto B.

Na figura abaixo, observa-se que as relações f e g não são funções, pois, para f , nem todo elemento de A tem um respectivo em B. Já para a relação g , não se tem todo elemento de A com um único respectivo em B. A relação h : esta, sim, é uma função, visto que para **todo** elemento de A existe um **único** respectivo em B.

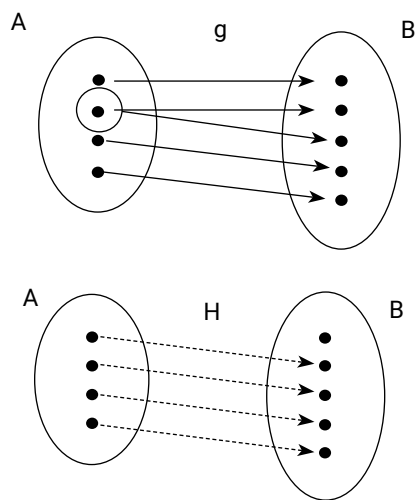
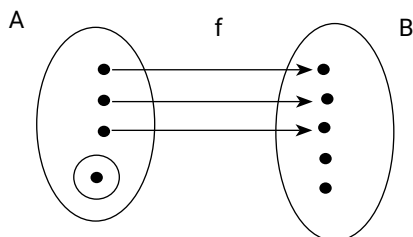


Figura 1. Diagrama de Venn para relações: f , g e h , entre dois conjuntos A e B.

Geralmente, existe uma expressão $Y = f(x)$ que expressa todos os elementos da relação, assim, para representar uma função f , de A em B, segundo uma lei de formação, tem-se:

$$f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = f(x)\}$$

ou

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto f(x)$$

Por exemplo, a função f , que associa a cada número real x o número $2x$, é expressa da seguinte forma:

$$f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \text{ e } y = 2x\}$$

ou

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto 2x$$

FUNÇÕES DEFINIDAS POR FÓRMULAS

Vamos representar a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = 3x$. O “ $\mathbb{R}$ ”, nesta situação, é o conjunto dos números reais, portanto a função $f(x)$ tem como Domínio e Contradomínio todos os números reais.

Deve-se lembrar de que $f(x)$ é igual a “ y ”, que é a nossa imagem. Para a lei de formação, entendemos que “ x ” assumirá alguns valores que resultará valores “ y ” da função. Tudo isso é regido da seguinte maneira:

$$f(x) = 3x$$

Quando “ x ” for igual a 1, por exemplo, é preciso substituir o valor dele na função. Vejamos:

$$f(1) = 3 \cdot 1 = 3$$

Afirmamos, então, que, para $x = 1$, a função tem resultado 3.

Funções Pares e Ímpares

- **Funções pares:** são aquelas em que $f(-x)=f(x)$, ou seja, quando “x” assume valores opostos e gera a mesma imagem. Vejamos:

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$f(3) = 3^2 - 4 = 5$$

$$f(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$$

- **Funções ímpares:** são aquelas para as quais $f(x) = -f(x)$. Ou seja, quando “x” assume valores opostos e gera imagens opostas. Veja:

$$f(x) = 2x$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$f(-4) = 2 \cdot (-4) = -8$$

DOMÍNIO, IMAGEM E CONTRADOMÍNIO

O **domínio** (D) é formado por todos os possíveis elementos do conjunto A ($D = A$) e, nos gráficos, são os valores que a abscissa (eixo x) pode assumir. O **contradomínio** (CD = B) é formado por todos os elementos do conjunto B, que são formados por todos os valores que as ordenadas (eixo y) podem assumir. A imagem (Im) é formada por todos os elementos do contradomínio que se relacionam com algum elemento do domínio. Assim, quando todo elemento x, pertencente a A, está associado a um elemento y, pertencente a B, dizemos que y é a imagem de x e denotamos por $y = f(x)$.

Conjunto imagem ou **imagem** de uma função é o subconjunto formado pelos elementos do contradomínio que possuem algum elemento correspondente no domínio.

Importante!

Se tivermos um elemento do conjunto de partida (A) que não tiver seu respectivo valor em relação ao conjunto (B), então essa relação **não será função**.

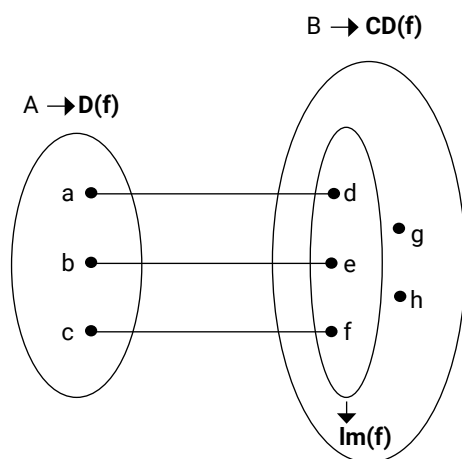


Figura 2. Diagrama A e B, em relação ao domínio (D), contradomínio (CD) e imagem (Im).

FUNÇÕES INJETORAS, SOBREJETORA E BIJETORA

As **funções injetoras** são funções tais que os distintos elementos do domínio se relacionam com distintos elementos da imagem, ou seja, dois elementos do domínio não podem ter a mesma imagem (figura 3a). Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x$ é injetora, visto que, para $x_1 \neq x_2$, tem-se $4x_1 \neq 4x_2$, logo, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

As **funções sobrejetoras** são funções nas quais o seu conjunto imagem (Im) é igual ao contradomínio (CD), isto é, $Im = CD = B$ (figura 3b). Sobre funções em que aconteçam as duas situações ao mesmo tempo, ou seja, seriam funções injetoras e sobrejetoras, dizemos que são **funções bijetoras** (figura 3c).

- Diagrama para funções injetoras:

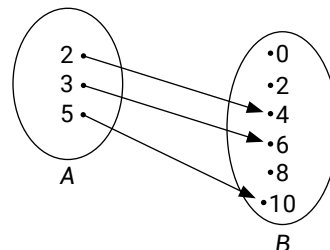


Figura 3a.

- Diagrama para funções sobrejetoras:

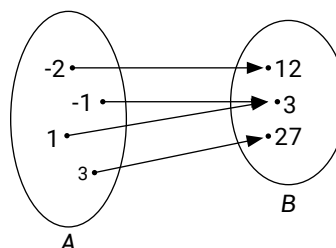


Figura 3b.

- Diagrama para funções bijetoras:

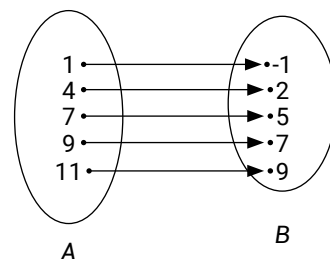


Figura 3c.

FUNÇÃO CRESCENTE, FUNÇÃO DECRESCENTE E FUNÇÃO COMPOSTA

Uma relação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ recebe a denominação de **função constante** quando, a cada elemento de $x \in \mathbb{R}$, associa-se sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$, ou seja, $y = f(x) = c$. O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas (eixo x) passando pelo ponto $(x, y) = (0, c)$ (figura 5). Assim, o conjunto imagem (Im) de f é $Im = \{c\}$.

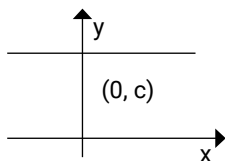


Figura 5. Função constante.

Assim, temos exemplos de funções constantes, como mostra a figura 6.

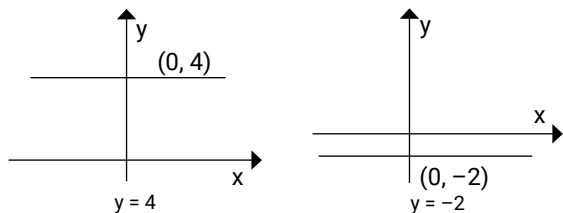


Figura 6. Exemplos de função constante.

Uma função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é dita **função crescente** em um intervalo se para dois valores quaisquer de x_1 e x_2 , pertencentes ao intervalo, onde $x_1 < x_2$ resultam em $f(x_1) < f(x_2)$. Ou seja, quando aumentam os valores de x , os valores de y também aumentam (figura 7a).

Uma função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é dita **função decrescente** em um intervalo se para dois valores quaisquer de x_1 e x_2 , pertencentes ao intervalo, onde $x_1 < x_2$ resultam em $f(x_1) > f(x_2)$. Ou seja, quando aumentam os valores de x , os valores de y diminuem (figura 7b).

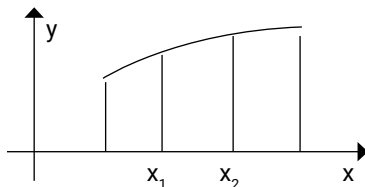


Figura 7a. Exemplo de função crescente.

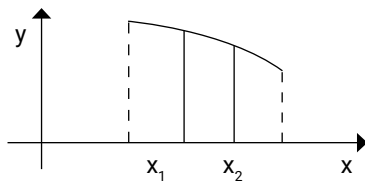


Figura 7b. Exemplo de função decrescente.

I FUNÇÃO INVERSA E GRÁFICOS

Uma função $f: A \rightarrow B$, bijetora de A em B , ou seja, distintos elementos do domínio (A) se relacionam com distintos elementos da imagem (Im) e a imagem é igual ao contradomínio, que é igual ao conjunto B ($Im = CD = B$), a relação inversa de f é uma função de $f: B \rightarrow A$, que denominamos de **função inversa** e é denotada por f^{-1} .

Acompanhe o exemplo para ilustrar melhor: uma função $f(x) = 2x - 1$, onde o domínio é dado por $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e o contradomínio e a imagem são dados por $B = \{1, 3, 5, 7\}$, resultando em $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$.

Desta maneira, temos que f é bijetora, visto que $D_f = A$ e $Im_f = B$. A função inversa de f também é uma função bijetora, visto que para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$ onde $f^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$ $D_{f^{-1}} = B$ e $Im_{f^{-1}} = A$. Logo, a sentença da função inversa de f é definida por:

$$f(x) = y = 2x - 1 \rightarrow 2x = y + 1 \rightarrow x = \frac{y + 1}{2}$$

Logo, se $f = \{(x, y) \in A \cdot B \mid y = 2x - 1\}$, então $f^{-1} = \{(y, x) \in B \cdot A \mid x = \frac{y + 1}{2}\}$.

Na figura 9, vemos os gráficos das funções f e f^{-1} acima. Percebemos, pela figura 9c, que eles são simétricos, em relação à bissetriz nos quadrantes ímpares do plano cartesiano. Para construir o gráfico, basta plotar os pontos (x, y) ou (y, x) das duas funções no plano cartesiano e traçar uma reta.

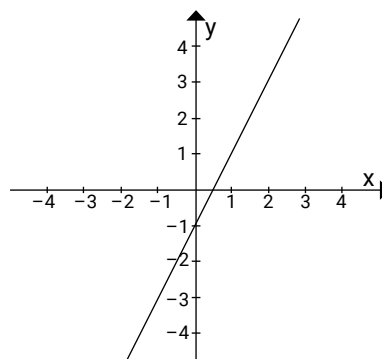


Figura 9a. Função $f(x) = 2x - 1$.

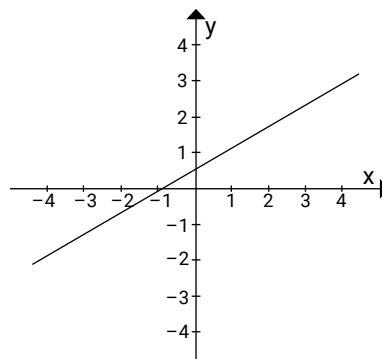


Figura 9b. Função $f^{-1}(x) = \frac{(x + 1)}{2}$.

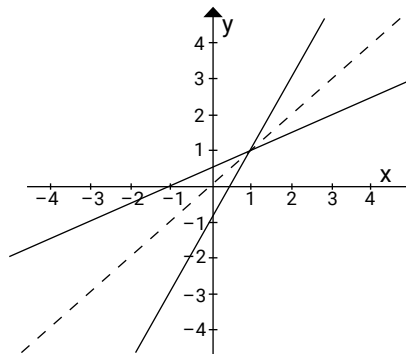


Figura 9c. As duas funções (a e b) mais a bissetriz em pontilhado.

Função Linear e Afim

A **função linear** é uma aplicação de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quando cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ e constante real, ou seja, $f(x) = ax$; $a \neq 0$.

O gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem e liga os pontos $(x, y) = (x, ax)$ no plano cartesiano (figura 10).

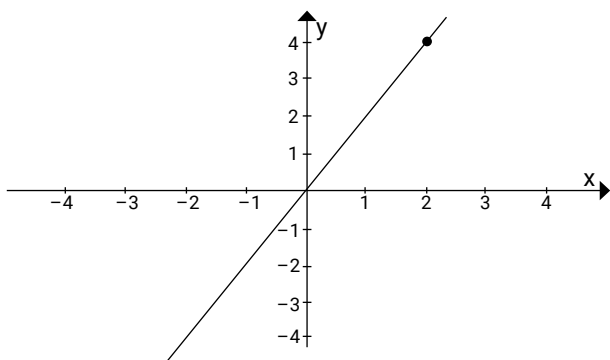


Figura 10. Gráfico da função linear $f(x) = 2x$ e o ponto $(x, y) = (2, 4)$.

A aplicação de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, quando cada $x \in \mathbb{R}$ estiver associado ao elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, a e b constante real, recebe o nome de **função afim**, ou seja, $f(x) = ax + b$; $a \neq 0$, onde a é conhecido como coeficiente angular e b como coeficiente linear.

O gráfico para a função afim, $f(x) = ax + b$, também é uma reta, onde o coeficiente angular (a) indica a inclinação da reta e o coeficiente linear indica o local em que a reta corta o eixo das ordenadas (eixo y). Seja a função afim $f(x) = 2x + 1$, $(x, y) = (0, 1)$ é o ponto onde a reta corta o eixo y ; com mais um ponto, pode-se traçar a reta que representa a função $f(x)$. Assim, para $x = 1 \rightarrow y = 3$, ou seja, o ponto $(x, y) = (1, 3)$. Seu gráfico segue na figura 11.

Importante!

Uma função afim $f(x) = ax + b$, quando $b = 0$, transforma-se na função linear $f(x) = ax$. Assim, dizemos que uma função linear é um caso particular da função afim.

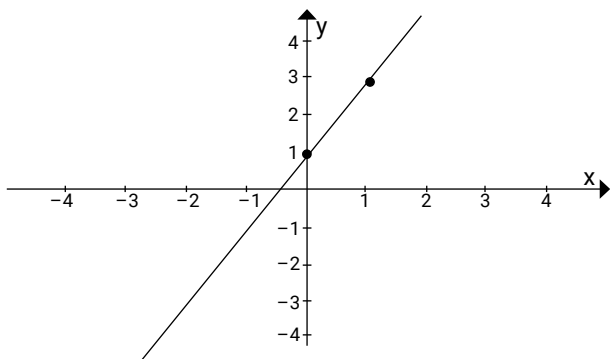


Figura 11. Gráfico da função afim $f(x) = 2x + 1$ e o ponto $(x, y) = (1, 3)$

Uma função afim é **crescente** sempre que o coeficiente angular for **positivo** ($a > 0$) e **decrescente** quando o mesmo for **negativo** ($a < 0$).

Sinal da Função Afim

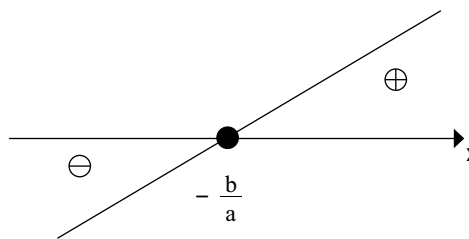
O estudo do sinal de uma função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é encontrar para quais valores de x temos $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$, com $x \in D_f$.

Inicialmente, identificamos onde a função é igual a zero, ou seja, encontramos a raiz da função $y = f(x)$. Para isso, fazemos $y = f(x) = 0$. Para função afim, temos a raiz sendo: $f(x) = ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Agora, teremos dois casos para estudo do sinal da função afim: um quando o coeficiente angular é positivo ($a > 0$); outro, quando é negativo ($a < 0$):

- 1º caso: $a > 0$ (crescente)

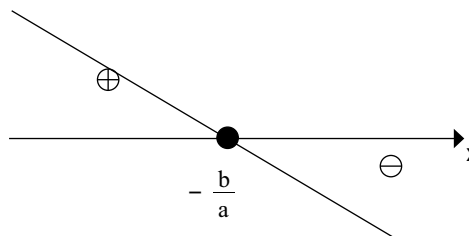
$$\begin{cases} f(x) = ax + b > 0 \rightarrow x > -\frac{b}{a} \\ f(x) = ax + b < 0 \rightarrow x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$



Assim, colocando esses resultados sobre o eixo x e adicionado os sinais, vemos em quais intervalos estão os sinais positivos e negativos da função.

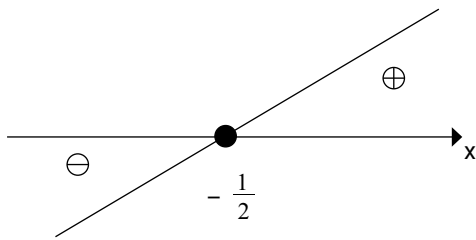
- 2º caso: $a < 0$ (decrescente)

$$\begin{cases} f(x) = ax + b > 0 \rightarrow x < -\frac{b}{a} \\ f(x) = ax + b < 0 \rightarrow x > -\frac{b}{a} \end{cases}$$



Vejamos o exemplo: na função $f(x) = 2x + 1$, sua raiz é dada por $2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$. Como o coeficiente angular é positivo ($a = 2 > 0$), então o estudo de sinal de $f(x)$ será:

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) > 0 \\ x < -\frac{1}{2} \rightarrow f(x) < 0 \end{cases}$$



Inequações-Produto e Quociente para Função Afim

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ e, as **inequações-produto** delas são dadas por:

$$f(x) \cdot g(x) > 0 \text{ ou } f(x) \cdot g(x) < 0 \text{ ou } f(x) \cdot g(x) \geq 0 \text{ ou } f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

De acordo com a regra de sinais do produto de números reais, temos que $(+ \cdot + = +)$; $(- \cdot - = +)$; $(+ \cdot - = -)$; assim, um conjunto solução (S) para uma dessas inequações pode ser encontrado da seguinte forma: seja a inequação produto $f(x) \cdot g(x) > 0$, para o produto ser positivo temos duas situações: $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$.

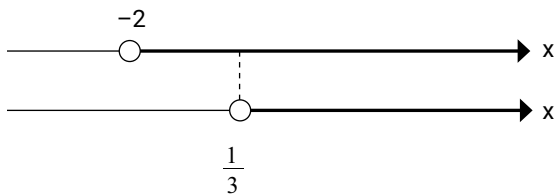
Assim, para $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ encontramos a solução S_1 para a $f(x) > 0$ e a solução S_2 para a $g(x) > 0$, chegando na solução geral $S_1 \cap S_2$.

Depois, para $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$, encontramos a solução S_3 para a $f(x) < 0$ e a solução S_4 para a $g(x) < 0$, chegando na solução geral $S_3 \cap S_4$.

Por fim, a solução para a inequação produto, $f(x) \cdot g(x) > 0$, é dada pela união das soluções anteriores, $S = \{S_1 \cap S_2\} \cup \{S_3 \cap S_4\}$. Raciocínio análogo para as outras inequações-produto.

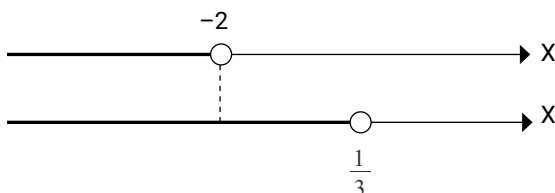
Tomemos como exemplo a inequação produto $(x + 2)(3x - 1) > 0$, ou seja, $f(x) \cdot g(x) > 0 \rightarrow f(x) = x + 2$ e $g(x) = 3x - 1$: seguindo os dois passos acima, temos:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \rightarrow x > -2 \\ 3x - 1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



Logo, a solução para esse primeiro caso é $S_1 \cap S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{3}\}$.

$$\begin{cases} x + 2 < 0 \rightarrow x < -2 \\ 3x - 1 > 0 \rightarrow x < \frac{1}{3} \end{cases}$$



Logo, a solução para esse segundo caso é $S_3 \cap S_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$. Assim, o conjunto solução para a inequação-produto $(x + 2)(3x - 1) > 0$ é:

$$S = \{S_1 \cap S_2\} \cup \{S_3 \cap S_4\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{3}\}$$

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$, as **inequações-quociente** delas são dadas por:

$$\frac{f(X)}{g(X)} > 0 \text{ ou } \frac{f(X)}{g(X)} < 0 \text{ ou } \frac{f(X)}{g(X)} \geq 0 \text{ ou } \frac{f(X)}{g(X)} \leq 0$$

De acordo com a regra de sinais do quociente de números reais, temos que $(+ \div + = +)$; $(- \div - = +)$; $(+ \div - = -)$, e lembrando que o denominador da fração não pode ser nulo. Assim, um conjunto solução (S) para uma dessas inequações pode ser encontrado da seguinte forma: seja a inequação-quociente $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$,

para o produto ser positivo temos duas situações: $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) \leq 0$ e $g(x) < 0$.

Assim, para $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$ encontramos a solução S_1 para a $f(x) \geq 0$ e a solução S_2 para a $g(x) > 0$, chegando na solução geral $S_1 \cap S_2$.

Depois, para $f(x) \leq 0$ e $g(x) < 0$, encontramos a solução S_3 para a $f(x) \leq 0$ e a solução S_4 para a $g(x) < 0$, chegando na solução geral $S_3 \cap S_4$.

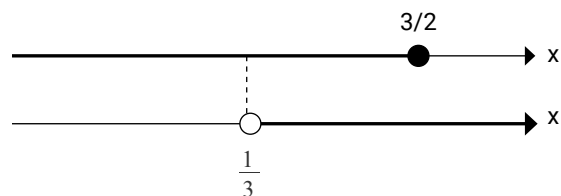
Por fim, a solução para a inequação-quociente $\frac{f(X)}{g(X)} \geq 0$ é dada pela união das soluções anteriores, $S = \{S_1 \cap S_2\} \cup \{S_3 \cap S_4\}$. Raciocínio análogo para as outras inequações-quociente.

Tomemos como exemplo a inequação-quociente $\frac{(x + 2)}{(3x - 1)} \geq 1$, ou seja, $\frac{(x + 2)}{(3x - 1)} \geq 1 \rightarrow \frac{(x + 2)}{(3x - 1)} - 1 \geq 0 \rightarrow \frac{(-2x + 3)}{(3x - 1)} \geq 0$. Assim, temos:

$$\frac{f(X)}{g(X)} \geq 0 \rightarrow f(x) = -2x + 3 \text{ e } g(x) = 3x - 1$$

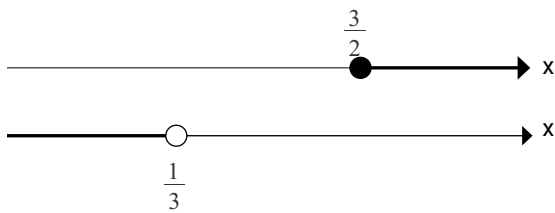
Seguindo os dois passos acima, temos:

$$\begin{cases} -2x + 3 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{3}{2} \\ 3x - 1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



Logo, a solução para esse primeiro caso é $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x \leq \frac{3}{2}\}$.

$$\begin{cases} -2x + 3 \leq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2} \\ 3x - 1 < 0 \rightarrow x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



Logo, a solução para esse segundo caso é $S_3 \cap S_4 = \{\emptyset\}$. Assim, o conjunto solução para a inequação-quociente $\frac{(x+2)}{(3x-1)} \geq 1$ é:

$$S = \{S_1 \cap S_2\} \cup \{S_3 \cap S_4\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3} < x \leq \frac{3}{2}\}$$

Quando se está trabalhando algebricamente com uma inequação, e no momento em que se tem a necessidade de multiplicar por -1 ambos os lados para isolar x , $(-1) \cdot -x \leq -\frac{3}{2} \cdot (-1)$, não esqueça de também inverter o sinal da inequação, ficando, nesse caso, $x \geq \frac{3}{2}$.

Funções Quadráticas

A **função quadrática, ou do 2º grau**, é uma aplicação de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quando cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$. Um exemplo de função quadrática: $f(x) = x^2 - 3x + 2$; $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$.

O gráfico para a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola. Assim, para sua construção são necessários mais que dois pontos, diferentemente do visto anteriormente na construção da reta. Para tal, inicialmente encontram-se os zeros ou as raízes da função, o vértice e o ponto de encontro com o eixo y .

São três coeficientes na função quadrática: a , b e c . O primeiro, (a) , indica se a concavidade da parábola está **voltada para cima** ($a > 0$) ou **para baixo** ($a < 0$), já o terceiro, (c) , indica onde a parábola corta o eixo das ordenadas (eixo y), ou seja, quando $x = 0$ e $y = c$.

Vamos analisar a função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$ para compreender melhor. Neste caso, $a = 1$, então a parábola terá sua concavidade voltada para cima; e $c = 2$ — a parábola cortará o eixo y nas coordenadas $(0, 2)$. Mais à frente, estudaremos como calcular as raízes e os vértices da função para, assim, construir um gráfico tal como este:

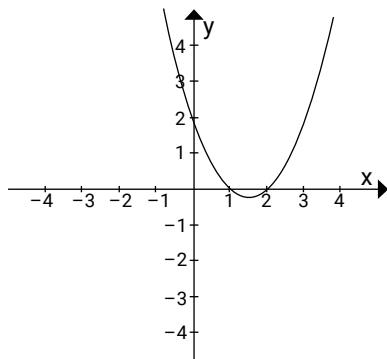


Figura 12. Gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$ com vértice

$$(x_v, y_v) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right) \text{ e raízes } (x_1, y) = (1, 0); (x_2, y) = (2, 0).$$

As raízes ou zeros da função quadrática são os valores de x tal que $a f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

Pela forma canônica, tem-se que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$ o discriminante, igualando essa função canônica a zero, chegamos nos valores das raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Usando essa fórmula, chegamos nas raízes da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1,$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 1}{2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

Assim, as raízes para a função quadrática são: $(x_1, y) = (1, 0)$; $(x_2, y) = (2, 0)$.

Importante!

Quando o valor de delta é negativo ($\Delta < 0$), não temos raízes reais, então a parábola não corta o eixo x . Quando o delta é igual a zero ($\Delta = 0$), as duas raízes são iguais, ou seja, teremos uma função quadrática de raiz unitária, fazendo com que a parábola encoste somente uma vez no eixo x . Já para delta positivo ($\Delta > 0$), teremos, então, a situação de duas raízes reais, onde a parábola corta o eixo x em dois lugares.

Sinal da Função Quadrática

O estudo do **sinal de uma função** $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é encontrar para quais valores de x temos $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$, com $x \in D_f$.

Inicialmente, identificamos onde a função é igual a zero, ou seja, encontramos a raiz da função $y = f(x)$. Para isto, fazemos $y = f(x) = 0$. Para função quadrática,

vimos que as raízes são: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$.

Agora, teremos um caso para estudo do sinal da função quadrática quando o coeficiente a é positivo ($a > 0$), outro quando é negativo ($a < 0$) e outro, ainda, quando $\Delta > 0$; $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$.

Para $\Delta < 0$, temos:

$$a > 0 \rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a < 0 \rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

No gráfico da função quadrática com $\Delta < 0$, como não existe raiz real, a parábola não corta o eixo x (abscissa).

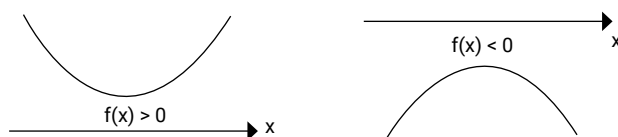


Figura 13.

Para $\Delta = 0$, temos:

$a > 0 \rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$a < 0 \rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

No gráfico da função quadrática com $\Delta = 0$, as raízes são iguais (raiz unitária), logo a parábola corta o eixo x (abscissa) em apenas um ponto. Neste ponto, a $f(x) = 0$.

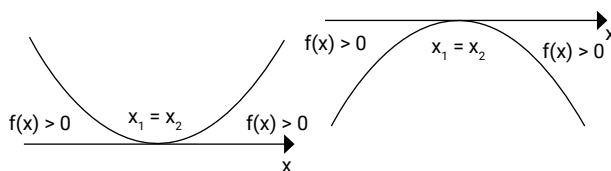


Figura 14.

Para $\Delta > 0$, temos:

$$\begin{aligned}
 a > 0 &\rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x < x_1 \text{ ou } x > x_2\} \\ f(x) < 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 < x < x_2\} \end{cases} \\
 a < 0 &\rightarrow \begin{cases} f(x) < 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 < x < x_2\} \\ f(x) > 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x < x_1 \text{ ou } x > x_2\} \end{cases}
 \end{aligned}$$

No gráfico da função quadrática com $\Delta > 0$, existem as duas raízes reais, logo a parábola corta o eixo x (abscissa) em dois pontos. Nestes pontos, a $f(x) = 0$.

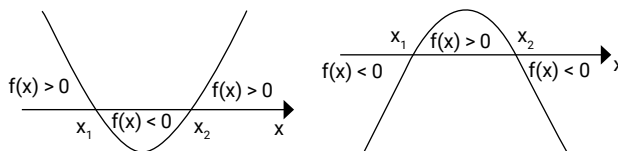


Figura 15.

Logo, no estudo do sinal da função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$, temos que $a > 0$, já que $a = 1$, e calculamos o valor do delta, $\Delta = 1 > 0$, e das raízes, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Assim, concluímos para o estudo de sinal:

$$a > 0 \rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\} \\ f(x) < 0, \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\} \end{cases}$$

Inequações para Função Quadrática

Seja $a \neq 0$ as **inequações quadráticas** são: $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$.

Resolver a inequação $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ significa encontrar valores de x tal que $f(x)$ seja positiva. O resultado para resolver essa inequação é encontrado no estudo de sinal da função $f(x)$. Assim dependendo dos valores de a e de delta temos algumas combinações de resultados para solução da $f(x) > 0$:

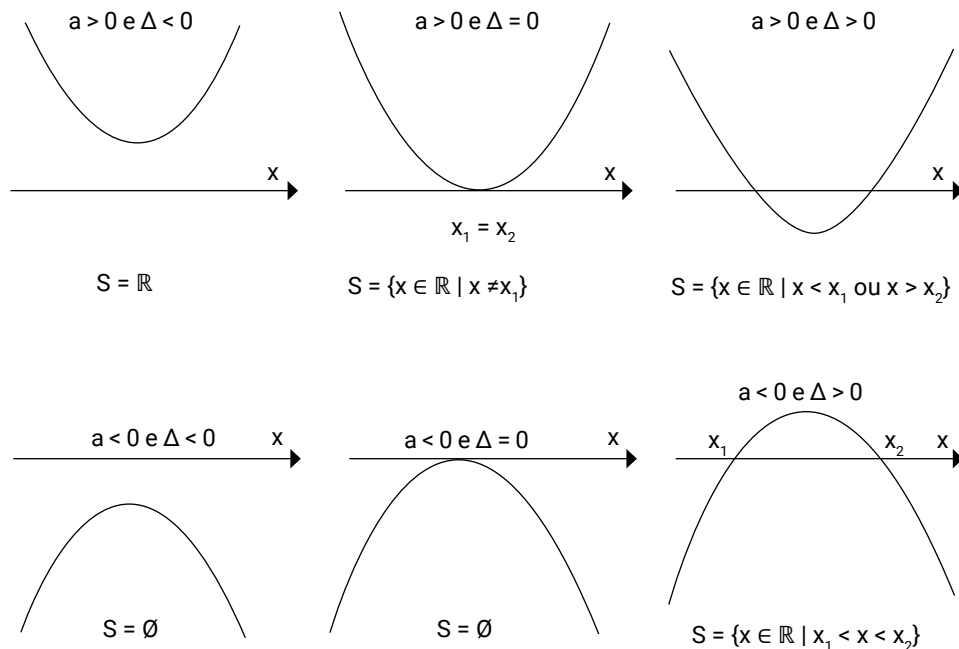


Figura 16.

No caso de **inequação produto** faz-se o estudo de sinal de cada uma das funções quadráticas e define-se a solução de acordo com a regra de sinais do produto de números reais, temos que $(+ \cdot + = +)$; $(- \cdot - = +)$; $(+ \cdot - = -)$, assim, um conjunto solução (S) para uma dessas inequações pode ser encontrada da seguinte forma, seja a inequação produto $f(x) \cdot g(x) > 0$, para o produto ser positivo temos duas situações: $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$.

Então seja a inequação produto $(x^2 - x - 6) \cdot (-x^2 + 2x - 1) > 0$, para achar o conjunto solução primeiro encontra-se as raízes de cada função $f(x) = x^2 - x - 6$ e $g(x) = -x^2 + 2x - 1$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \begin{cases} \Delta_f = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 \\ \Delta_g = (2)^2 - 4(-1)(-1) = 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = -2 \\ x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = 3 \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \frac{-(2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = 1 \end{cases}$$

Para $f(x) = x^2 - x - 6$, com $\Delta > 0$ e $a > 0$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\} \\ f(x) < 0, \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\} \end{cases}$$

Para $g(x) = -x^2 + 2x - 1$, com $\Delta = 0$ e $a < 0$:

$$g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, para a inequação produto ser positiva, $f(x) \cdot g(x) = (x^2 - x - 6) \cdot (-x^2 + 2x - 1) > 0$, sabendo que $g(x) < 0$, então a f também deve ser negativa, $f(x) < 0$. Assim, a solução será $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$

No caso de **inequação quociente** faz-se o estudo de sinal de cada uma das funções quadráticas e define-se como solução de acordo com a regra de sinais do quociente de números reais, temos que $(+ \div + = +)$; $(- \div - = +)$; $(+ \div - = -)$, assim, um conjunto solução (S) para uma dessas inequações pode ser encontrada da seguinte forma, seja a inequação quociente $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, para o quociente ser positivo temos duas situações: $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$.

Então seja a inequação quociente $\frac{(2x^2 + x - 1)}{(-x^2 + 2x)} < 0$, para achar o conjunto solução primeiro encontra-se as raízes de cada função $f(x) = 2x^2 + x - 1$ e $g(x) = -x^2 + 2x$:

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \begin{cases} \Delta_f = (1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9 \\ \Delta_g = (2)^2 - 4(-1)(0) = 4 - 0 = 4 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = -1 \\ x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{-(2) - \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = 2 \\ x_2 = \frac{-(2) + \sqrt{4}}{2 \cdot (-1)} = 0 \end{cases}$$

- Para $f(x) = 2x^2 + x - 1$, com $\Delta > 0$ e $a > 0$:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \right\} \\ f(x) < 0, \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1}{2} \right\} \end{cases}$$

- Para $g(x) = -x^2 + 2x$, com $\Delta > 0$ e $a < 0$:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\} \\ g(x) < 0, \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\} \end{cases}$$

Portanto, para a inequação quociente ser negativa, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(2x^2 + x - 1)}{(-x^2 + 2x)} > 0$, temos duas situações, a primeira com $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$. Assim, a solução será:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$$

A segunda para $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$. Assim, a solução será:

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1}{2}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\}$$

Logo, a solução das inequações quociente $\frac{(2x^2 + x - 1)}{(-x^2 + 2x)}$ é:

$$S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\}$$

Máximo e Mínimo para Função Quadrática

Dizemos que o número $y_M \in \text{Im}(f)$ é o valor **máximo** ou **mínimo** da função $y = f(x)$ se, somente se, $y_M \geq y$ ou $y_M \leq y$, respectivamente. Ao valor $x_M \in D_f$ tal que $y_M = f(x_M)$ chamamos de ponto máximo ou mínimo da função. Esse ponto também conhecido como **vértice da função quadrática** ou da parábola. Denotamos o vértice como:

$$(x_M, y_M) = V(x_v, y_v) = V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

$$\text{Ou seja, } V_x = \frac{-b}{2a} \text{ e } V_y = \frac{-\Delta}{4a}$$

Para a função quadrática $f(x) = x^2 - 3x + 2$, o vértice é dado por:

$$V(x_v, y_v) = V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = V\left(\frac{-(-3)}{2 \cdot 1}, \frac{-((-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2)}{4 \cdot 1}\right) = V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

Sendo $a = 1 > 0$, então a concavidade da parábola está voltada para cima e o vértice será ponto de mínimo da função.

Importante!

O vértice de uma função quadrática será ponto de **máximo** da função quando $a < 0$ e ponto de **mínimo** da função quando $a > 0$.

FUNÇÃO MODULAR

Definição, Gráfico, Domínio e Imagem

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela associação de cada $x \in \mathbb{R}$ $af(x) = |x| \in \mathbb{R}$ é denominada **função modular**.

Considerando a definição de módulo de um número real, em que para um número x tem-se $|x| = x$, se $x \geq 0$ ou $|x| = -x$, se $x < 0$, podemos descrever a função modular também da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico para a função modular $f(x) = |x|$ é definido pela junção dos dois gráficos da função de duas sentenças (x e $-x$) e resultará em duas semirretas de origem na raiz da função, $(x, y) = (0, 0)$, ou seja, essas retas são bissetrizes dos primeiro e segundo quadrantes do plano (figura 17).

O domínio da função modular é o conjunto dos reais, ou seja, para todo $\mathbb{R}$, existe um único $y \in \text{Im}(f)$, sendo que a imagem da função assume somente valores

positivos (reais não negativos ($\mathbb{R}_+$)). Logo, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$. Note, que no gráfico da função as retas ficam acima do eixo x, em que todos os valores para y são positivos (figura 17).

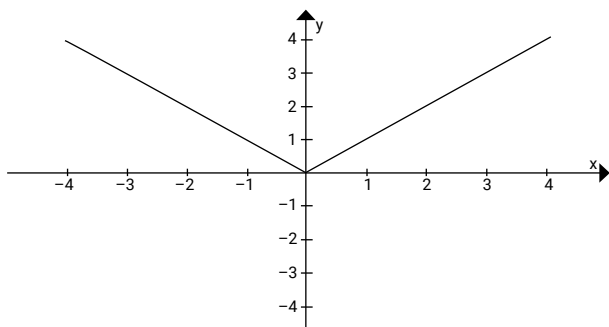


Figura 17. Gráfico da Função modular $f(x) = |x|$.

Para funções modulares com potência quadrática como $f(x) = |x^2 + 4x|$, primeiro divida a função modular em funções definidas por duas sentenças:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x \\ -(x^2 + 4x) \end{cases}$$

A essas duas funções encontramos as suas raízes:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 16$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -4 \\ x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 0 \end{cases}$$

As raízes são -4 e 0 , como para a primeira sentença o valor de $a > 0$, então a concavidade é voltada para cima, e na segunda sentença o valor de $a < 0$, ou seja, concavidade voltada para baixo. Logo, a solução positiva para a função nas duas sentenças segue o intervalo de x abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, x \leq -4 \text{ e } x \geq 0 \\ -x^2 - 4x, -4 < x < 0 \end{cases}$$

Dessa forma construímos o gráfico para $x^2 + 4x$ no intervalo abaixo de -4 e acima de 0 e para $-x^2 - 4x$ no intervalo entre -4 e 0 (figura 18).

As raízes das sentenças definidas pela função modular podem também ser chamadas de **ponto (s) de inflexão** da curva (funções quadráticas) ou da reta (funções lineares ou Afim). Inflexão é um ponto sobre uma curva na qual a curvatura troca o sinal, nesse caso indo para o lado positivo do eixo y, pois, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

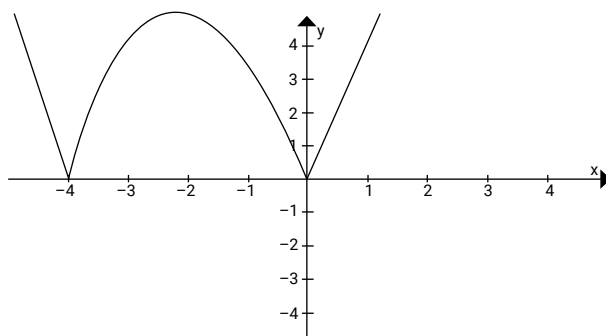


Figura 18. Gráfico da Função Modular $f(x) = |x^2 + 4x|$.

Equações Modulares

Lembrando da definição de módulo de um número real, em que para um número $k > 0$ tem-se $|x| = k \Leftrightarrow x = k$ ou $x = -k$. Então a solução da **equação modular** $|x+2| = 3$ é:

$$|x+2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 3 \rightarrow x = 1 \\ x+2 = -3 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

$$S = \{-5, 1\}$$

Caso tenhamos duas funções modulares, como a equação $|3x+2| = |x-1|$, a solução é dada da seguinte forma:

$$|3x+2| = |x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 = x-1 \rightarrow x = -\frac{3}{2} \\ 3x+2 = -x+1 \rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$S = \left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4} \right\}$$

E na situação de uma função modular, como a equação $|3x+2| = 2x-3$, a solução é válida para valores de x tal que $2x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{3}{2}$. A solução da equação é dada por:

$$|3x+2| = 2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 = 2x-3 \rightarrow x = -5 \\ 3x+2 = -2x+3 \rightarrow x = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Como a solução só é válida para valores de $x \geq \frac{3}{2}$, então a solução para $|3x+2| = 2x-3$ é $S = \{\emptyset\}$.

Inequações Modulares

Uma das propriedades de módulo para números reais, em que para um número $k > 0$ tem-se $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$ e $|x| > k \Leftrightarrow x < -k$ ou $x > k$. Com essa propriedade podemos resolver **inequações modulares** como $|3x-2| < 4$ e sua solução é:

$$|3x - 2| < 4 \Leftrightarrow -4 < 3x - 2 < 4 \rightarrow -2 < 3x < 6 \rightarrow -\frac{2}{3} < x < 2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < 2\}$$

Mas se a inequação for $|5x + 4| \geq 4$, a solução é:

$$|5x + 4| \geq 4 \Leftrightarrow 5x + 4 \leq -4 \text{ ou } 5x + 4 \geq 4 \Leftrightarrow 5x \leq -8 \text{ ou } 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{8}{5} \text{ ou } x \geq 0$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{8}{5} \text{ ou } x \geq 0\}$$

Para a inequação $|x + 1| + 2x - 7 \geq 0$ temos:

$$|x + 1| + 2x - 7 \geq 0 \rightarrow |x + 1| \geq 7 - 2x$$

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Para $x \geq -1$ temos $x + 1 \geq 7 - 2x \Leftrightarrow x \geq 2$, com solução:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

Já para $x < -1$ temos $-x - 1 \geq 7 - 2x \Leftrightarrow x \geq 8$, com solução:

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\} = \{\emptyset\}$$

Assim, a solução de $|x + 1| + 2x - 7 \geq 0$ é dada por:

$$S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} \cup \{\emptyset\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

I FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição, Características, Domínio, Imagem e Gráfico

Seja a um número real, tal que seja maior que zero e diferente de 1 ($0 < a \neq 1$ ou $a \in \mathbb{R}^*_{+} - \{1\}$), a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o número $f(x) = a^x$, é conhecida como **função exponencial**. Assim funções como: 2^x , $(\sqrt{2})^x$ e 10^x são exemplos de funções exponenciais.

Da definição de função exponencial, a partir de algumas características, pode-se notar:

- $x = 0 \rightarrow f(0) = a^0 = 1$;
- $f(x) = a^x$ é crescente para $a > 1$, ou seja, $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- $f(x) = a^x$ é decrescente para $0 < a < 1$, ou seja, $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- $n \in \mathbb{Z}$ e $a > 1$, então $f(n) = a^n > 1$ se, e somente se, $n > 0$;
- $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r \in \mathbb{Q}$, então $f(r) = a^r > 1$ se, e somente se, $r > 0$;
- $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $r, s \in \mathbb{Q}$, então $a^s > a^r$ se, e somente se, $s > r$;
- $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $\alpha \in \{\mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$, então $a^\alpha > 1$ se, e somente se, $\alpha > 0$;
- $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $b \in \mathbb{R}$, então $a^b > 1$ se, e somente se, $b > 0$;
- $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, então $a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 > x_2$;
- $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $b \in \mathbb{R}$, então $a^b > 1$ se, e somente se, $b < 0$;
- $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, então $a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 < x_2$.

O **domínio** da função exponencial é o conjunto dos reais, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y \in \text{Im}(f)$, sendo que a **imagem** da função assume somente valores positivos não nulos (reais não negativos e não nulo ($\mathbb{R}^*_{+}$)). Logo, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^*_{+}$. Note que no gráfico da função a curva está toda acima do eixo x , pois $f(x) = a^x > \forall x \in \mathbb{R}$.

Além disso, temos que o ponto de encontro da curva com o eixo y , é no ponto $(x, y) = (0, 1)$, $x = 0 \rightarrow f(0) = a^0 = 1$. Assim, o gráfico para duas funções exponenciais, crescente ($a > 1$) e decrescente ($0 < a < 1$), segue como na figura 19.

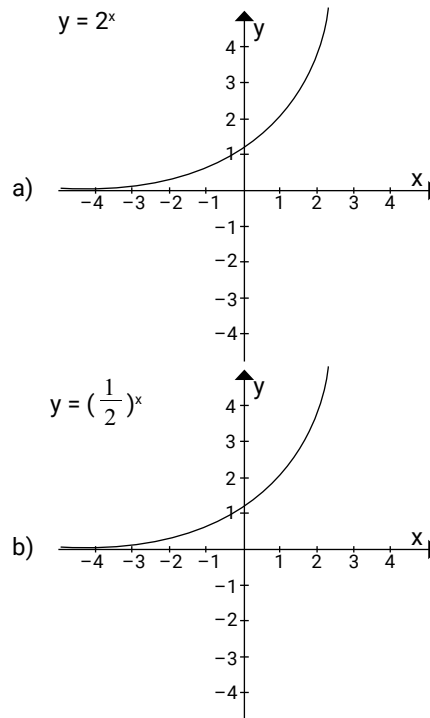


Figura 19. Gráfico da Função Exponencial, (a) crescente ($f(x) = 2^x$) e (b) decrescente ($f(x) = (0,5)^x$).

Equações Exponenciais

Equações exponenciais são aquelas equações onde a incógnita x está no expoente, como: $2^x = 32$ e $2^x - 4^x = 2$.

A forma de solucionar a **equação exponencial** é deixando todas as potências com a mesma base, como a $f(x) = a^x$ é injetora, podemos dizer que potências iguais e de mesma base têm expoentes iguais, ou seja, $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$, ($a \in \mathbb{R}^*_{+} - \{1\}$).

Seja a equação exponencial $2^x = 128$, temos a solução o valor de x igual a:

$$2^x = 128 \rightarrow 2^x = 2^7 \rightarrow x = 7$$

$$S = \{7\}$$

Agora para a equação exponencial $5^{2x^2+3x-2} = 1$ temos x igual a:

$$5^{2x^2+3x-2} = 1 \rightarrow 5^{2x^2+3x-2} = 5^0 \rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$$