SUMÁRIO

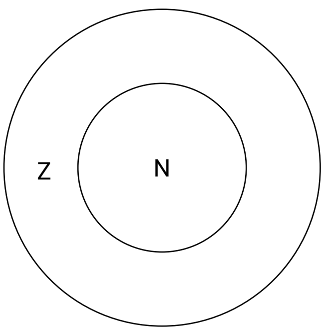
MATEMÁTICA

NÚMEROS INTEIROS

Os números inteiros são os números naturais e seus respectivos opostos (negativos). Veja:

Z = {..., -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...}

O símbolo desse conjunto é a letra Z. Uma coisa importante é saber que todos os números naturais são inteiros, mas nem todos os números inteiros são naturais. Logo, podemos representar através de diagramas e afirmar que o conjunto de números naturais está contido no conjunto de números inteiros ou ainda que N é um subconjunto de Z. Observe:



Podemos destacar alguns subconjuntos de números. Veja:

- Números inteiros não negativos = {4,5,6...}. Veja que são os números naturais;
- Números inteiros não positivos = {... -3, -2, -1, 0}; Veja que o zero também faz parte deste conjunto, pois ele não é positivo nem negativo;
- Números inteiros negativos = {... -3, -2, -1}. O zero não faz parte;
- Números inteiros positivos = {5, 6, 7...}. Novamente, o zero não faz parte.

OPERAÇÕES

Há quatro operações básicas que podemos efetuar com estes números. São elas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Adição

É dada pela soma de dois números. Ou seja, a adição de 20 e 5 é: 20 + 5 = 25

Veja mais alguns exemplos:

Adição de 15 e 3: 15 + 3 = 18

Adição de 55 e 30: 55 + 30 = 85

Principais propriedades da operação de adição:

- Propriedade comutativa: a ordem dos números não altera a soma.

  Ex.: 115 + 35 é igual a 35 + 115.

- Propriedade associativa: quando é feita a adição de 3 ou mais números, podemos somar 2 deles, primeiramente, e depois somar o outro, em qualquer ordem, que vamos obter o mesmo resultado.

  Ex.: 2 + 3 + 5 = (2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5) = 10

- Elemento neutro: o zero é o elemento neutro da adição, pois qualquer número somado a zero é igual a ele mesmo.

  Ex.: 27 + 0 = 27; 55 + 0 = 55.

- Propriedade do fechamento: a soma de dois números inteiros sempre gera outro número inteiro.

Ex.: a soma dos números inteiros 8 e 2 gera o número inteiro 10 (8 + 2 = 10).

Subtração

Subtrair dois números é o mesmo que diminuir, de um deles, o valor do outro. Ou seja, subtrair 7 de 20 significa retirar 7 de 20, restando 13: 20 – 7 = 13.

Veja mais alguns exemplos:

Subtrair 5 de 16: 16 -5 = 11

30 subtraído de 10: 30 – 10 = 20

Principais propriedades da operação de subtração:

- Propriedade comutativa: como a ordem dos números altera o resultado, a subtração de números não possui a propriedade comutativa.

  Ex.: 250 – 120 = 130 e 120 – 250 = -130.

- Propriedade associativa: não há essa propriedade na subtração.
- Elemento neutro: o zero é o elemento neutro da subtração, pois, ao subtrair zero de qualquer número, este número permanecerá inalterado.

  Ex.: 13 – 0 = 13.

- Propriedade do fechamento: a subtração de dois números inteiros sempre gera outro número inteiro.

  Ex.: 33 – 10 = 23.

Multiplicação

A multiplicação funciona como se fosse uma repetição de adições. Veja:

A multiplicação 20 x 3 é igual à soma do número 20 três vezes (20 + 20 + 20), ou à soma do número 3 vinte vezes (3 + 3 + 3 + ... + 3).

Algo que é muito importante e você deve lembrar sempre são as regras de sinais na multiplicação de números.

SINAIS NA MULTIPLICAÇÃO		
Operações		Resultados
+	+	+
-	-	+
+	-	-
-	+	-

Importante levar em conta que,

- a multiplicação de números de mesmo sinal tem resultado positivo.

  Ex.: 51 × 2 = 102; (-33) × (-3) = 99

- a multiplicação de números de sinais diferentes tem resultado negativo.

  Ex.: 25 × (-4) = -100; (-15) × 5 = -75

Principais propriedades da operação de multiplicação:

- Propriedade comutativa: A x B é igual a B x A, ou seja, a ordem não altera o resultado.

  Ex.: 8 x 5 = 5 x 8 = 40.

- Propriedade associativa: (A x B) x C é igual a (C x B) x A, que é igual a (A x C) x B.

  Ex.: (3 x 4) x 2 = 3 x (4 x 2) = (3 x 2) x 4 = 24.

- Elemento neutro: a unidade (1) é o elemento neutro da multiplicação, pois ao multiplicar 1 por qualquer número, este número permanecerá inalterado.

  Ex.: 15 x 1 = 15.

- Propriedade do fechamento: a multiplicação de números inteiros sempre gera um número inteiro.

  Ex.: 9 x 5 = 45

- Propriedade distributiva: essa propriedade é exclusiva da multiplicação. Veja como fica: Ax(B+C) = (AxB) + (AxC)

  Ex.: 3x(5+7) = 3x(12) = 36
  Usando a propriedade:
  3x(5+7) = 3x5 + 3x7 = 15+21 = 36

Divisão

Quando dividimos A por B, queremos repartir a quantidade A em partes de mesmo valor, sendo um total de B partes.

Ex.: Ao dividirmos 50 por 10, queremos dividir 50 em 10 partes de mesmo valor. Ou seja, nesse caso teremos 10 partes de 5 unidades, pois se multiplicarmos 10 x 5 = 50. Ou ainda podemos somar 5 unidades 10 vezes consecutivas, ou seja, 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=50.

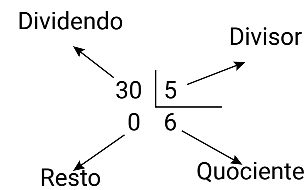
Algo que é muito importante e você deve lembrar sempre são as regras de sinais na divisão de números.

SINAIS NA DIVISÃO		
Operações		Resultados
+	+	+
-	-	+
+	-	-
-	+	-

Dica

- A divisão de números de mesmo sinal tem resultado positivo.
  Ex.: 60 ÷ 3 = 20; (-45) ÷ (-15) = 3
- A divisão de números de sinais diferentes tem resultado negativo.
  Ex.: 25 ÷ (-5) = -5; (-120) ÷ 5 = -24

Esquematizando:



Dividendo = Divisor × Quociente + Resto
30 = 5 · 6 + 0

Principais propriedades da operação de divisão:

- Propriedade comutativa: a divisão não possui essa propriedade;
- Propriedade associativa: a divisão não possui essa propriedade;
- Elemento neutro: a unidade (1) é o elemento neutro da divisão, pois ao dividir qualquer número por 1, o resultado será o próprio número.

  Ex.: 15 / 1 = 15;

- Propriedade do fechamento: aqui chegamos em uma diferença enorme dentro das operações de números inteiros, pois a divisão não possui essa propriedade, uma vez que ao dividir números inteiros podemos obter resultados fracionários ou decimais.

Ex.: 2 / 10 = 0,2 (não pertence ao conjunto dos números inteiros).

Potenciação

Pela definição da radiciação, um índice n não pode assumir valores negativos ou racionais; entretanto, a mesma restrição não se aplica ao expoente de uma potência.

Pela noção de potência como o produto de um número vezes si mesmo n vezes, a ideia de n < 0 não apresenta sentido lógico em uma primeira análise; porém, se considerarmos que o sinal do expoente diz respeito ao valor da base da potência, a situação se altera.

Veja o caso de 2^{-1}. Ele representa o inverso da potência 2^1, portanto:

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

Atenção! O inverso de um número qualquer $a \in \mathbb{R}$ é um número qualquer $b \in \mathbb{R}$ que torne a igualdade a · b = 1 verdadeira. Logo .

Considerando agora uma potência de base a e expoente $n < 0$, i.e., $a^{-n} = \frac{1}{a^{n'}}$ para demostrar uma relação mais detalhada, podemos mostrar que corretamente temos $a^{-n} = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$.

Essa definição é importante na resolução de problemas em equações exponencias. Veja o exemplo:

$$2^2 \cdot 2^{-1} \cdot 3 \ \frac{2^2 \cdot 3}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 2 \cdot 3 = 6$$

Uma observação importante é que, pela definição acima, o número 0^n é um símbolo sem significado, uma vez que o inverso de 0 não existe para o conjunto dos números reais.

EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Expressões Numéricas podem ser definidas por um conjunto de números calculado pelas operações que estudamos anteriormente e que seguem a seguinte ordem, com leitura da esquerda para a direita.

1° - Raízes e Potências;
2° - Multiplicações e Divisões;
3° - Adições e Subtrações.

Nas expressões, ainda podem aparecer os seguintes símbolos que alteram a ordem de precedência:

( ): parênteses;
[ ]: colchetes;
{ }: chaves;

Caso haja qualquer um desses símbolos, primeiro se resolve o que está dentro do parêntese, depois o que está dentro dos colchetes e, por fim, dentro das chaves. Lembrando sempre de seguir a ordem de precedência dos operadores.

Veja um exemplo aplicando essa ordem:

(4 x 5) + 7 - (5 - 3) x 2 =
(20) + 7 - (2) x 2 =
20 + 7 - 2 x 2 =
20 + 7 - 4 =
27 - 4 =
23

MÚLTIPLOS E DIVISORES DE NÚMEROS NATURAIS

Diz-se que um número natural “a” é múltiplo de outro natural “b” se existir um número natural “k” tal que:

$$a = k \cdot b$$

Exemplo: 15 é múltiplo de 5, pois 15 = 3 · 5

Quando a = k · b, segue que a é múltiplo de b, mas também a é múltiplo de k, como é o caso do número 35, múltiplo de 5 e de 7, pois: 35 = 7 · 5.

Quando a = k · b, então, a é múltiplo de b; se conhecemos b e queremos obter todos os seus múltiplos, basta fazer k assumir todos os números naturais possíveis.

Como conclusão às assertivas propostas acima, tem-se que:

- um número b é sempre múltiplo dele mesmo → a = 1 · b ↔ a = b;
- para obter os múltiplos de dois, isto é, os números da forma a = k · 2, k seria substituído por todos os números naturais possíveis.

A definição de divisor está relacionada com a de múltiplo.

Um número natural b é divisor do número natural a, se a é múltiplo de b.

Exemplo: 3 é divisor de 15, pois 15 = 3 · 5. Logo, 15 é múltiplo de 3 e também de 5.

Lembre-se: um número natural tem uma quantidade finita de divisores. Por exemplo, o número 6 poderá ter no máximo 6 divisores, pois trabalhando no conjunto dos números naturais, não podemos dividir 6 por um número maior do que ele. Os divisores naturais de 6 são os números 1, 2, 3, 6, o que significa que o número 6 tem 4 divisores.

MDC

Agora que sabemos o que são números primos, múltiplos e divisores, vamos ao MDC. O Máximo Divisor Comum de dois ou mais números é o maior número que é divisor comum de todos os números dados.

Exemplo: Encontrar o MDC entre 18 e 24.

Divisores naturais de 18: D(18) = {1, 2, 3, 6, 9, 18}.

Divisores naturais de 24: D(24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}.

Pode-se escrever, agora, os divisores comuns a 18 e 24: D(18) ∩ D (24) = {1, 2, 3, 6}.

Observando os divisores comuns, podemos identificar o maior divisor comum dos números 18 e 24, ou seja: MDC (18,24) = 6.

Outra técnica para o cálculo do MDC:

- **Decomposição em Fatores Primos:** para obter o MDC de dois ou mais números por esse processo, procede-se da seguinte maneira:

Decompõe-se cada número dado em fatores primos.

O MDC é o produto dos fatores comuns obtidos, cada um deles elevado ao seu menor expoente.

Exemplo: Achar o MDC entre 300 e 504.

300	2	
150	2	
75	3	$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$
25	5	
5	5	
1		

504	2	
252	2	
126	2	$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
63	3	
21	3	
7	7	
1		

$$MDC\ (300, 504) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

MMC

O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número positivo que é múltiplo comum de todos os números dados. Consideremos:

Exemplo: Encontrar o MMC entre 8 e 6.

Múltiplos positivos de 6: M(6) = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...}

MATEMÁTICA

Múltiplos positivos de 8: M(8) = {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, ...}

Podem-se escrever, agora, os múltiplos positivos comuns: M(6) ∩ M(8) = {24, 48, 72, ...}

Observando os múltiplos comuns, pode-se identificar o mínimo múltiplo comum dos números 6 e 8, ou seja: mmc(6, 8) = 24.

Outra técnica para o cálculo do MMC:

- **Decomposição isolada em fatores primos:** para obter o MMC de dois ou mais números por esse processo, procedemos da seguinte maneira:

Decompomos cada número dado em fatores primos.

O MMC é o produto dos fatores comuns e não comuns, cada um deles elevado ao seu maior expoente.

Exemplo: Achar o MMC entre 18 e 120.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 18 = 2 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{MMC }(18,120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$$

PROBLEMAS

1. (VUNESP — 2015) Dividindo-se um determinado número por 18, obtém-se quociente n e resto 15. Dividindo-se o mesmo número por 17, obtém-se quociente (n + 2) e resto 1. Desse modo, é correto afirmar que n(n + 2) é igual a

a) 440.
b) 420.
c) 400.
d) 380.
e) 340.

Dividendo = 18 x n + 15
Dividendo = 17 x (n+2) + 1
18 x n + 15 = 17 x (n+2) + 1
18n + 15 = 17n + 34 + 1
18n – 17n = 35 – 15
n = 20
Logo, n.(n+2) = 20.(20+2) = 20.22 = 440. Resposta: Letra A.

2. (FGV — 2019) O resultado da operação 2+3×4−1 é

a) 13.
b) 15.
c) 19.
d) 22.
e) 23.

Primeiro vamos fazer a multiplicação e depois as demais operações:
2 + 3 × 4 – 1 = 2 + 12 – 1 = 13
Resposta: Letra A

3. (INSTITUTO AOCP — 2018) O total de números que estão entre o dobro de 140 e o triplo de 100 é igual a

a) 17.
b) 19.
c) 21.
d) 23.
e) 25.

Dobro de 140 = 280
Triplo de 100 = 300
Total de números entre 280 e 300:
281 até 291 = 10 números
291 até 299 = 9 números
10 + 9 = 19 números.
Resposta: Letra B.

4. (INSTITUTO CONSULPLAN — 2019) Os símbolos das operações que deverão ser inseridos nos quadrados para que o cálculo seja verdadeiro são, respectivamente: 4_3_2_1 = 10

a) + / x / +
b) x / − / ÷
c) + / ÷ / −
d) x / + / +

*4 * 3 – 2/1=*
*4 * 3 = 12*
–2/1= –2 =
12 – 2 = 10

Resposta: Letra B.

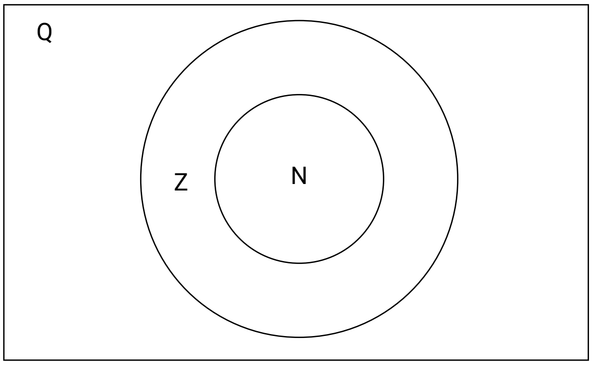
NÚMEROS RACIONAIS

São aqueles que podem ser escritos na forma da divisão (fração) de dois números inteiros. Ou seja, escritos na forma A/B (A dividido por B), onde A e B são números inteiros.

Exemplos: 7/4 e -15/9 são racionais. Veja, também, que os números 87, 321 e 1221 são racionais, pois são divididos pelo número 1.

Interessante lembrar que, **qualquer número natural é também inteiro e todo número inteiro é também racional.**

O símbolo desse conjunto é a letra Q e podemos representar por meio de diagramas a relação entre os conjuntos naturais, inteiros e racionais, veja:



Representação Fracionária e Decimal

Há 3 tipos de números no conjunto dos números racionais:

- Frações:

  Ex.: $\frac{8}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{11}$ etc.

- Números decimais.

  Ex.: 1,75

- Dízimas periódicas.

  Ex.: 0,33333...

OPERAÇÕES

Adição

Segue a mesma lógica da adição comum.
Ex.: 15,25 + 5,15 = 20,4

Subtração

Segue a mesma lógica da subtração comum.
Ex.: 57,3 – 0,12 = 57,18

Multiplicação

Aplicamos o mesmo procedimento da multiplicação comum.
Ex.: 4,6 × 1,75 = 8,05

Divisão

Devemos multiplicar ambos os números (divisor e dividendo) por uma potência de 10 (10, 100, 1000, 10000 etc.) de modo a retirar todas as casas decimais presentes. Após isso, é só efetuar a operação normalmente.
Ex.: 5,7 ÷ 1,3
5,7 × 100 = 570
1,3 × 100 = 130
570 ÷ 130 = 4,38

Potenciação

Os números racionais são aqueles que possuem casas decimais finitas ou infinitas com repetição dos números.

A potenciação com expoentes racionais abre precedente para uma interpretação mais detalhada da ideia da radiciação. Já vimos isso anteriormente, mas agora falaremos novamente.

Tomemos $\sqrt{16} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2} = \sqrt{(2 \cdot 2)^2} = 2 \cdot 2 = 2^2$. É possível perceber que, se $2^4 = 4^2 = 16 \Leftrightarrow \sqrt[4]{16} = \sqrt{4} = 2$, melhorando para o uso dos números racionais mais diretamente,

$$\sqrt[4]{16} = (16)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4}{4}} = 2.$$

Agora tomemos $\sqrt{2}$, sendo que $(\sqrt{2})^2 = 2 = \sqrt{4}$, por substituição $\sqrt{2} = \sqrt{\sqrt{4}}$. Para descobrirmos como calcular isso, apenas devemos nos perguntar quantas n vezes devemos multiplicar $\sqrt{2}$ por si mesmo para que o resultado seja 4, tal que $\sqrt[n]{b} = \sqrt{2}$. Se a resposta for n=4, ela está correta. Vejamos,

$$\sqrt{\sqrt{4}} = \left(\sqrt{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\ .$$

Acompanhe as operações acima com calma e atenção.

Como raciocinar dessa maneira está longe da praticabilidade em uma prova, vamos resumir isso afirmando que qualquer radiciação de radicando *b* e índice *n* pode ser escrita como uma potência de base *b* e expoente $\frac{1}{n}$.

Voltemos ao primeiro exemplo:

$$\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}} = (2^4)^{\frac{1}{2}}$$

Podemos ler esse último termo como 2^4 multiplicado a si mesmo $\frac{1}{2}$ vez, isso pode ser transcrito como:

$$2^{4 \cdot \frac{1}{2}} = 2^2$$

Já no segundo caso, teríamos:

$$\sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{4^{\frac{1}{2}}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4}$$

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$$

Com essas comparações estabelecidas, podemos definir uma potência de expoentes racionais mais claramente.

Para uma base b $\in \mathbb{R}$, um expoente $m \in \mathbb{Z}$ um índice $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$, uma potência de expoentes racionais é definida como $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$, com $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, como já mostrado acima.

FRAÇÕES

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

Adição e Subtração de Fração

Para somar ou subtrair frações, é necessário olharmos para os denominadores, ou seja, para a "base" das frações. Há duas situações possíveis. Vejamos:

- denominadores iguais (quando acontece essa situação, basta repetir as bases e operar os numeradores)

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4-2}{3} = \frac{2}{3}$$

- denominadores diferentes (quando acontece essa situação, é necessário achar o denominador comum, para operar as frações). Veja:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4}$$

O número 12 é o primeiro múltiplo, ao mesmo tempo, de 3 e 4. Então, dividiremos 12 pelos denominadores e, depois, multiplicaremos o resultado pelos numeradores.

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4x1}{12 \div 3} + \frac{3x3}{12 \div 4} = \frac{4+9}{12} = \frac{13}{12}$$

Achando o menor denominador comum (mmc):

3 – 4	2 (aqui vamos dividir sempre pelo menor número primo possível)
3 – 2	2
3 – 1	3
1 – 1	mmc: 2 · 2 · 3 = 12

Todo número que é dividido apenas por ele mesmo e pelo número 1 é um número primo.

Exemplo:

3 (apenas por ser dividido por 1 e 3)
13 (apenas por ser dividido por 1 e 13)

Multiplicação de Fração

Fazer a multiplicação entre frações é muito simples! Basta multiplicar o numerador de uma das frações pelo numerador da outra fração e fazer o mesmo processo entre os denominadores. Veja:

$$\frac{2}{3} x \frac{5}{4} = \frac{2x5}{3x4} = \frac{10}{12}$$

Ainda não chegamos ao resultado final da operação, pois é necessário simplificar a fração o máximo possível. Para realizar esse procedimento, devemos achar um número que divide, ao mesmo tempo, o denominador e o numerador. No caso apresentado anteriormente, sabemos que é o número 2. Aplicando, fica assim:

$$\frac{10 \div 2}{12 \div 2} = \frac{5}{6}$$

Pronto! Chegamos no resultado final, pois não há mais como simplificar.

Divisão de Fração

Vou te ensinar uma maneira bem simples para resolver esse tipo de operação. Para dividir frações, deve-se repetir a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda fração. Depois, basta realizar a multiplicação normalmente, da mesma forma que aprendemos. Veja:

Atente-se: podemos simplificar frações, dividindo o numerador e o denominador pelo mesmo número.

RAZÕES E PROPORÇÕES

A razão entre duas grandezas é igual a divisão entre elas, veja:

$$\frac{2}{5}$$

Ou podemos representar por 2 ÷ 5 (Lê-se 2 está para 5).

Já a proporção é a igualdade entre razões, veja:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Ou podemos representar por 2 ÷ 3 = 4 ÷ 6 (Lê-se 2 está para 3 assim como 4 está para 6).

Os problemas mais comuns que envolvem razão e proporção é quando se aplica uma **variável** qualquer dentro da proporcionalidade e se deseja saber o valor dela. Veja o exemplo:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{6} \text{ ou } 2 \div 3 = x \div 6$$

Para resolvermos esse tipo de problema devemos usar a Propriedade Fundamental da razão e proporção: **produto dos meios pelos extremos.**

Meio: 3 e x;

Extremos: 2 e 6.

Logo, devemos fazer a multiplicação entre eles numa igualdade. Observe:

$$3 \cdot X = 2 . 6$$

$$3X = 12$$

$$X = 12/3$$

$$X = 4$$

Lembre-se de que a maioria dos problemas envolvendo esse tema são resolvidos utilizando essa propriedade fundamental. Porém, algumas questões acabam sendo um pouco mais complexas e pode ser útil conhecer algumas propriedades para facilitar. Vamos a elas.

Propriedade das Proporções

- **Somas Externas**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Vamos entender um pouco melhor resolvendo uma questão-exemplo:

Suponha que uma fábrica vai distribuir um prêmio de R$10.000 para seus dois empregados (Carlos e Diego). Esse prêmio vai ser dividido de forma proporcional ao tempo de serviço deles na fábrica. Carlos está há 3 anos na fábrica e Diego está há 2 anos na fábrica. Quanto cada um vai receber?

Primeiro, devemos montar a proporção. Sejam C a quantia que Carlos vai receber e D a quantia que Diego vai receber, temos:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2}$$

Utilizando a propriedade das somas externas:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{C + D}{3 + 2}$$

Perceba que C + D = 10.000 (as partes somadas), então podemos substituir na proporção:

$$\frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{C + D}{3 + 2} = \frac{10.000}{5} = 2.000$$

Aqui cabe uma observação importante!

Esse valor de 2.000, que chamamos de "Constante de Proporcionalidade", é que nos mostra o valor real das partes dentro da proporção. Veja:

$$\frac{C}{3} = 2.000$$

$$C = 2000 \times 3$$

$$C = 6.000 \text{ (esse é o valor de Carlos)}$$

$$\frac{D}{2} = 2.000$$

$$D = 2.000 \times 2$$

$$D = 4.000 \text{ (esse é o valor de Diego)}$$

Assim, Carlos vai receber R$6.000 e Diego vai receber R$4.000.

- **Somas Internas**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$

É possível, ainda, trocar o numerador pelo denominador ao efetuar essa soma interna, desde que o mesmo procedimento seja feito do outro lado da proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + b}{a} = \frac{c + d}{c}$$

Vejamos um exemplo:

$$\frac{x}{14 - x} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{x + 14 - x}{x} = \frac{2 + 5}{2}$$

$$\frac{14}{x} = \frac{7}{2}$$

$$7 . x = 2 \cdot 14$$

$$x = \frac{14 \cdot 2}{7} = 4$$

Portanto, encontramos que x = 4.

> **Importante!**
>
> Vale lembrar que essa propriedade também serve para subtrações internas.

- **Soma com Produto por Escalar**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + 2b}{b} = \frac{c + 2d}{d}$$

Vejamos um exemplo para melhor entendimento:

Uma empresa vai dividir o prêmio de R$13.000 proporcionalmente ao número de anos trabalhados. São dois funcionários que trabalham há 2 anos na empresa e três funcionários que trabalham há 3 anos.

Seja A o prêmio dos funcionários com 2 anos e B o prêmio dos funcionários com 3 anos de empresa, temos:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{3}$$

Porém, como são 2 funcionários na categoria A e 3 funcionários na categoria B, podemos escrever que a soma total dos prêmios é igual a R$13.000.

$$2A + 3B = 13.000$$

Agora, multiplicando em cima e embaixo de um lado por 2 e do outro lado por 3, temos:

$$\frac{2A}{4} = \frac{3B}{9}$$

Aplicando a propriedade das somas externas, podemos escrever o seguinte:

$$\frac{2A}{4} = \frac{3B}{9} = \frac{2A + 3B}{4 + 9}$$

Substituindo o valor da equação 2A + 3B na proporção, temos:

$$\frac{2A}{4} = \frac{3B}{9} = \frac{2A + 3B}{4 + 9} = \frac{13.000}{13} = 1.000$$

Logo,

$$\frac{2A}{4} = 1.000$$

$$2A = 4 \times 1.000$$

$$2A = 4.000$$

$$A = 2.000$$

Fazendo a mesma resolução em B:

$$\frac{3B}{9} = 1.000$$

$$3B = 9 \times 1.000$$

$$3B = 9.000$$

$$B = 3.000$$

Sendo assim, os funcionários com 2 anos de casa receberão R$2.000 de bônus. Já os funcionários com 3 anos de casa receberão R$3.000 de bônus.

O total pago pela empresa será:

$$2.2000 + 3.3000 = 4000 + 9000 = 13000$$

NÚMEROS E GRANDEZAS PROPORCIONAIS E DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS

Diretamente Proporcional

Um dos tópicos mais comuns em questões de prova é dividir uma determinada quantia em partes proporcionais a determinados números. Vejamos um exemplo para entendermos melhor como esse assunto é cobrado.

Exemplo:

A quantia de 900 mil reais deve ser dividida em partes proporcionais aos números 4, 5 e 6. A menor dessas partes corresponde a:

Primeiro vamos chamar de X, Y e Z as partes proporcionais, respectivamente a 4, 5 e 6. Sendo assim, X é proporcional a 4, Y é proporcional a 5 e Z é proporcional a 6, ou seja, podemos representar na forma de razão. Veja:

$$\frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{Z}{6} = \text{constante de proporcionalidade}$$

Usando uma das propriedades da proporção, somas externas, temos:

$$\frac{X + Y + Z}{4 + 5 + 6} \quad \frac{900.000}{15} = 60.000$$

A menor dessas partes é aquela que é proporcional a 4, logo:

$$\frac{X}{4} = 60.000$$

$$X = 60.000 \times 4$$

$$X = 240.000$$

Inversamente Proporcional

É um tipo de questão menos recorrente, mas, não menos importante. Consiste em distribuir uma quantia X a três pessoas, de modo que cada uma receba um quinhão inversamente proporcional a três números. Vejamos um exemplo:

Suponha que queiramos dividir 740 mil em partes inversamente proporcionais a 4, 5 e 6.

Vamos chamar de X as quantias que devem ser distribuídas inversamente proporcionais a 4, 5 e 6, respectivamente. Devemos somar as razões e igualar ao total que dever ser distribuído para facilitar o nosso cálculo, veja:

$$\frac{X}{4} + \frac{X}{5} + \frac{X}{6} = 740.000$$

Agora vamos precisar tirar o M.M.C. (mínimo múltiplo comum) entre os denominadores para resolvermos a fração.

4 – 5 – 6 | 2

2 – 5 – 3 | 2

1 – 5 – 3 | 3

1 – 5 – 1 | 5

1 – 1 – 1 | 2 x 2 x 3 x 5 = 60

Assim, dividindo o M. M. C. pelo denominador e multiplicando o resultado pelo numerador temos:

$$\frac{15x}{60} + \frac{12x}{60} + \frac{10x}{60} = 740.000$$

$$\frac{37x}{60} = 740.000$$

$$X = 1.200.000$$

Agora basta substituir o valor de X nas razões para achar cada parte da divisão inversa.

$$\frac{x}{4} = \frac{1.200.000}{4} = 300.000$$

$$\frac{x}{5} = \frac{1.200.000}{5} = 240.000$$

$$\frac{x}{6} = \frac{1.200.000}{6} = 200.000$$

Logo, as partes dividas inversamente proporcionais aos números 4, 5 e 6 são, respectivamente 300.000, 240.000 e 200.000.

REGRA DE TRÊS

Regra de Três Simples

A regra de três simples envolve apenas duas grandezas. São elas:

- **Grandeza Dependente:** é aquela cujo valor se deseja calcular a partir da grandeza explicativa;
- **Grandeza Explicativa ou Independente:** é aquela utilizada para calcular a variação da grandeza dependente.

Existem dois tipos principais de proporcionalidades que aparecem frequentemente em provas de concursos públicos. Veja a seguir:

- **Grandezas diretamente proporcionais:** o aumento de uma grandeza implica o aumento da outra;
- **Grandezas inversamente proporcionais:** o aumento de uma grandeza implica a redução da outra.

Vamos esquematizar para sabermos quando será direta ou inversamente proporcionais:

DIRETAMENTE PROPORCIONAL ⟶ + / + **OU** - / -

Aqui, as grandezas aumentam ou diminuem juntas (sinais iguais).

PROPORCIONAL ⟶ + / - **OU** - / +

Aqui, uma grandeza aumenta e a outra diminui (sinais diferentes).

Agora, vamos esquematizar a maneira que iremos resolver os diversos problemas:

DIRETAMENTE PROPORCIONAL ⟶ Multiplica cruzado

INVERSAMENTE PROPORCIONAL ⟶ Multiplica na horizontal

Vejamos alguns exemplos para fixarmos um pouco mais como funciona:

- um muro de 12 metros foi construído utilizando 2.160 tijolos. Caso queira construir um muro de 30 metros nas mesmas condições do anterior, quantos tijolos serão necessários?

Primeiro vamos montar a relação entre as grandezas e depois identificar se é direta ou inversamente proporcional.

12 m -------- 2160 (tijolos)
30 m -------- X (tijolos)

Veja que de 12m para 30m tivemos um aumento (+) e que para fazermos um muro maior vamos precisar de mais tijolos, ou seja, também deverá ser aumentado (+). Logo, as grandezas são diretamente proporcionais e vamos resolver multiplicando cruzado. Observe:

12 m -------- 2.160 (tijolos)
30 m -------- X (tijolos)

$12 \cdot X = 30 . 2160$

$12X = 64800$

$X = 5400$ tijolos

Assim, comprovamos que realmente são necessários mais tijolos.

- uma equipe de 5 professores gastou 12 dias para corrigir as provas de um vestibular. Considerando a mesma proporção, quantos dias levarão 30 professores para corrigir as provas?

Do mesmo jeito que no exemplo anterior, vamos montar a relação e analisar:

5 (prof.) -------- 12 (dias)
30 (prof.) -------- X (dias)

Veja que de 5 (prof.) para 30 (prof.) tivemos um aumento (+), mas, como agora estamos com uma equipe maior, o trabalho será realizado de forma mais rápida. Logo, a quantidade de dias deverá diminuir (-). Desta forma, as grandezas são inversamente proporcionais e vamos resolver multiplicando na horizontal. Observe:

5 (prof.) ⟶ 12 (dias)

30 (prof.) ⟶ X (dias)

$30 \cdot X = 5 \cdot 12$

$30X = 60$

$X = 2$

A equipe de 30 professores levará apenas 2 dias para corrigir as provas.

Regra de Três Composta

A regra de três composta envolve mais de duas variáveis. As análises sobre se as grandezas são diretamente e inversamente proporcionais devem ser feitas cautelosamente levando em conta alguns princípios:

- as análises devem sempre partir da variável dependente em relação às outras variáveis;
- as análises devem ser feitas individualmente, ou seja, deve-se comparar as grandezas duas a duas, mantendo as demais constantes;
- a variável dependente fica isolada em um dos lados da proporção.

Vamos analisar alguns exemplos e ver na prática como isso tudo funciona:

- se 6 impressoras iguais produzem 1000 panfletos em 40 minutos, em quanto tempo 3 dessas impressoras produziriam 2000 desses panfletos?

Da mesma forma que na regra de três simples, vamos montar a relação entre as grandezas e analisar cada uma delas isoladamente duas a duas.

6 (imp.) -------- 1000 (panf.) -------- 40 (min)
3 (imp.) -------- 2000 (panf.) -------- X (min)

Vamos escrever a proporcionalidade isolando a parte dependente de um lado e igualando as razões da seguinte forma – se for direta, vamos manter a razão, agora, se for inversa, vamos inverter a razão. Observe:

$$\frac{40}{X} = \frac{?}{?} \cdot \frac{?}{?}$$

Analisando isoladamente duas a duas:

6 (imp.) -------- 40 (min)
3 (imp.) ---- ---- X (min)

Perceba que de 6 impressoras para 3 impressoras o valor diminui (-) e que o tempo irá aumentar (+), pois agora teremos menos impressoras para realizar a tarefa. Logo, as grandezas são inversas e devemos inverter a razão.

$$\frac{40}{X} = \frac{3}{6} \cdot \frac{?}{?}$$

Analisando isoladamente duas a duas:

1000 (panf.) -------- 40 (min)
2000 (panf.) ----- -- X (min)