SUMÁRIO

RACIOCÍNIO LÓGICO-MATEMÁTICO

ESTRUTURA LÓGICA DE RELAÇÕES ARBITRÁRIAS ENTRE PESSOAS, LUGARES, OBJETOS OU EVENTOS FICTÍCIOS

Neste tipo de conteúdo, intitulado **Estrutura lógica de relações arbitrárias**, você notará a presença de situações diversas do mundo real, nas quais, a partir de um conjunto de hipóteses, ou seja, informações previamente conhecidas, será requisitada uma informação implícita ao problema.

Os enunciados irão fornecer o mínimo possível de afirmações sobre os objetos de estudo, sejam frases de negação, do tipo: "Maria não é a mais nova", ou, ainda, afirmações, como "João é o mais velho." Você perceberá, também, que frases de afirmação te dão mais conclusões do que frases negativas, uma vez que, no primeiro tipo, as relações são mutuamente excludentes, ou seja, em um mesmo problema, se João é o mais velho, então ele não é o mais novo e não há nenhuma outra pessoa mais velha do que ele.

Como, muitas vezes, os enunciados trazem uma gama de informações, recomenda-se o uso de uma tabela simples que deve ser preenchida de acordo com as interpretações do problema. Cabe ressaltar, ainda, que a tabela não será completamente preenchida logo no primeiro momento, no qual o uso da interpretação será necessário para finalização dos exercícios.

Acompanhe os exemplos a seguir e perceba a construção da tabela com os **indivíduos** do problema e suas possíveis **características**.

1. **(CONSULPLAN — 2021)** Adriana, Bruna e Cléo são professoras em uma escola pública e lecionam as disciplinas de português, matemática e ciências, mas não necessariamente nessa ordem. Verificando a idade das três, a professora de português, que é prima de Bruna, é a mais nova. Além disso, considere que a professora de ciências é mais nova do que Cléo. Nesse contexto, é necessariamente correto afirmar que:

a) Cléo é professora de português.
b) Bruna é a professora mais velha.
c) Adriana é professora de português.
d) Cléo não é professora de matemática.

Primeiramente, podemos dispor uma tabela simples com as características principais do problema:
1º: Foi dito que a professora de português é prima de Bruna e é a mais nova dentre as três, logo, podemos marcar com um "x" as lacunas que relacionam Bruna com as características de professora de português e ser a mais nova, já que não são características dela, mas sim de sua prima.
2º: Como o problema diz que a professora de ciências é mais nova do que Cléo, sabemos então que Cléo também não é professora de ciências e não é a mais nova. Isso nos leva ao fato de que se nem Bruna nem Cléo são as mais novas, então Adriana que é.
3º: Portanto, como a professora mais nova é também professora de português, temos que Adriana é a professora de português.
4º: Com isso, já podemos completar os espaços da tabela e analisar as alternativas da questão. Note que as lacunas em destaque são frutos das interpretações apresentadas nos passos anteriores.

	MAIS NOVA	DO MEIO	MAIS VELHA	PORTUGUÊS	MATEMÁTICA	CIÊNCIAS
ADRIANA	**V**	X	X	**V**	X	X
BRUNA	**X**	V	X	**X**	X	V
CLÉO	**X**	X	V	X	V	**X**

"Cléo é professora de português.": Não é uma afirmação correta, pois ela é de matemática.
"Bruna é a professora mais velha.": Não é uma afirmação correta, pois Bruna é a do meio.
"Adriana é professora de português.": É uma afirmação correta, como vimos na tabela.
"Cléo não é professora de matemática.": Não é uma afirmação correta como vimos na tabela. Resposta: Letra D.

2. **(FUNRIO — 2012)** Os carros X, Y e Z possuem 100, 110 e 150 cavalos de potência, não necessariamente nessa ordem. Sabe-se que um deles é de fabricação nacional e que os outros dois são importados, sendo um de fabricação alemã e o outro de fabricação japonesa. Porém não se sabe qual a correta associação entre carros e países de fabricação. No entanto, sabe-se que: o carro X possui 100 cavalos de potência; o carro que possui 150 cavalos de potência é de fabricação alemã; o carro que possui 110 cavalos de potência não é nacional; e que o carro Y não é de fabricação japonesa.

Qual o país de fabricação e a potência do carro Y?

a) Alemanha e 150 cavalos.
b) Alemanha e 110 cavalos.
c) Japão e 100 cavalos.
d) Japão e 110 cavalos.
e) Brasil e 100 cavalos.

Primeiramente, podemos dispor uma tabela simples com as características principais do problema. Note que as marcações nas lacunas em destaque se referem às informações retiradas a partir do enunciado.
1º: Se o carro de 150 cavalos é alemão e o de 110 não é nacional, então o de 110 cavalos só pode ser japonês.
2º: Se o carro Y não é japonês e o carro X tem 100 cavalos, então o alemão de 150 cavalos será o carro Y.

	100	110	150	BRASIL	ALEMANHA	JAPÃO
X	**V**	**X**	**X**	V	X	X
Y	X	X	V	X	V	**X**
Z	X	V	X	X	X	V

Portanto, o carro Y é de fabricação alemã e tem 150 cavalos. Resposta: Letra A.

DEDUZIR NOVAS INFORMAÇÕES DAS RELAÇÕES FORNECIDAS E AVALIAR AS CONDIÇÕES USADAS PARA ESTABELECER A ESTRUTURA DAQUELAS RELAÇÕES

VALORES LÓGICOS

Na lógica temos apenas dois valores lógicos – **verdadeiro ou falso**. Quando temos uma declaração verdadeira, o seu valor lógico é **Verdade** (V) e quando é falsa, dizemos que seu valor lógico é **Falso** (F).

PROPOSIÇÕES LÓGICAS SIMPLES

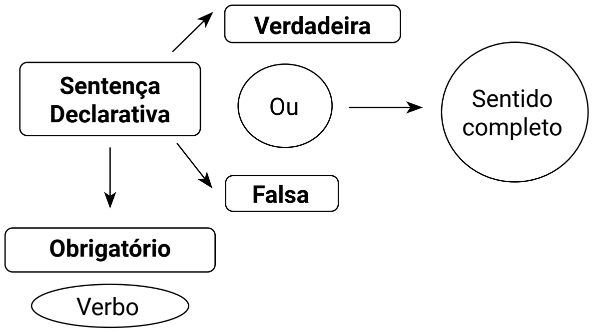
Vamos começar nosso estudo falando sobre o que é uma proposição lógica. Observe a frase a seguir:
Ex.: Paula vai à praia.
Para saber se temos ou não uma proposição, precisamos de três requisitos fundamentais:

- **Ser uma oração:** ou seja, são frases com verbos;
- **Oração declarativa:** a frase precisa estar apresentando uma situação, um fato;
- **Pode ser classificada como Verdadeira ou Falsa:** ou seja, podemos atribuir o valor lógico verdadeiro ou o valor lógico falso para a declaração.

Tendo isso em vista, podemos afirmar claramente que a frase "Paula vai à praia" é uma proposição lógica, pois temos a presença de um verbo (ir), uma informação completa (temos o sujeito claro na oração) e podemos afirmar se é verdade ou falsa.

Importante!
Proposição Lógica é uma **oração declarativa que admite apenas um valor lógico**: V ou F.

Ou então podemos também esquematizar o que é uma proposição lógica assim:
Chama-se proposição toda sentença declarativa que pode ser valorada ou só como verdadeira ou só como falsa. A presença do **verbo** é obrigatória juntamente com o **sentido completo** (caráter informativo).



Toda proposição pode ser representada simbolicamente pelas letras do alfabeto, veja no exemplo:

- **p:** Sabino é um pintor esperto*;*
- **r:** Kate é uma mulher alta*.*

Na situação temos duas proposições sendo representadas pelas letras p e r.

Bom! Agora que já sabemos o que são proposições lógicas, fica tranquilo distinguir o que **não são proposições**. Isto é fundamental, pois várias questões de prova perguntam exatamente isso – são apresentadas algumas frases e você precisa identificar qual delas não é uma proposição. Vejamos os casos em que mais aparecem:

- **Perguntas:** são as orações interrogativas.
  Exemplo: Que horas vamos ao cinema?
  Essa pergunta não pode ser classificada como verdadeira ou falsa;
- **Exclamações:** são frases exclamativas.
  Exemplo: Que lindo cabelo!
  Essa exclamação não pode ser valorada, pois apresentam percepções subjetivas;
- **Ordens:** são orações com verbo no imperativo.
  Exemplo: Pegue o livro e vá estudar.

Uma ordem não pode ser classificada como verdadeira ou falsa. Muito cuidado com esse tipo de oração, pois pode ser facilmente confundida com uma proposição lógica.

Não são proposições – **perguntas, exclamações e ordens.**

Temos um outro caso menos cobrado em provas, mas que também não é proposição lógica, sendo o **paradoxo**. Para ficar mais claro, veja o exemplo a seguir:

Ex.: Esta frase é uma mentira.

Quando atribuímos um valor de verdade para a frase, então na verdade, ele mentiu, uma vez que a própria frase já diz isso, e se atribuirmos o valor falso, então a frase é verdade, pois ela diz ser uma mentira e já sabemos que isso é falso.

Perceba que sempre que valoramos a frase ela nos resulta um valor contrário, ou seja, estamos diante de uma frase que é contraditória em si mesma. Isso é a definição de um paradoxo.

SENTENÇA ABERTA

Dizemos que uma sentença é aberta quando não conseguimos ter a informação completa que a oração nos mostra. Veja o exemplo a seguir:

Ex.: Ele é o melhor cantor de rock.

Perceba que há presença do verbo e que conseguimos parcialmente entender o que a frase quer dizer. Todavia, logo surge a pergunta: **Ele quem?** Aqui nossa informação não consegue ser completa e por isso temos mais um caso que **não** é proposição lógica. Observe outros exemplos:

$$X + 5 = 10$$

Aquele carro é amarelo.

$$5 + 5$$
$$X - Y = 20$$

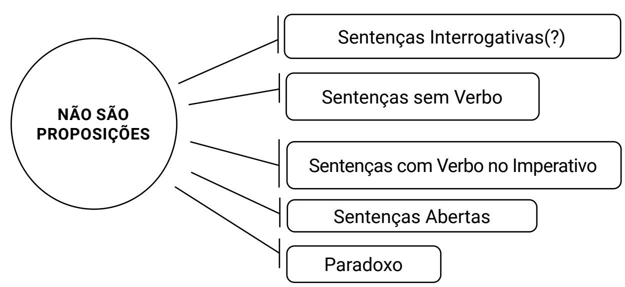
Todos os exemplos acima são sentenças abertas, então podemos resumir da seguinte forma:

As variáveis: ele, aquele ou variáveis matemáticas (X ou Y) tornam a sentença aberta.

Sempre será uma proposição lógica na escrita matemática e podemos notar que há verbos nos casos a seguir:

- = (é igual);
- ≠ (é diferente);
- > (é maior);
- < (é menor);
- ≥ (é maior ou igual);
- ≤ (é menor ou igual);

Esquematizando o que não são proposições lógicas:



PRINCÍPIOS DA LÓGICA PROPOSICIONAL

É fundamental que você conheça três princípios para deixarmos tudo alinhado com as proposições lógicas. Veja:

- **Princípio do terceiro excluído:** uma proposição deve ser Verdadeira ou Falsa, não havendo outra possibilidade. Não é possível que uma proposição seja “quase verdadeira” ou “quase falsa”;
- **Princípio da não contradição:** dizemos que uma mesma proposição não pode ser, ao mesmo tempo, verdadeira e falsa;
- **Princípio da Identidade:** cada ser é único, ou seja, uma proposição não assume o significado de outra proposição lógica.

PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

Temos proposições compostas quando há duas ou mais proposições simples ligadas por meio dos conectivos lógicos. Veja os exemplos:

- Sabino corre e Marcos compra leite;
- O gato é azul ou o pato é preto;
- Se Carlinhos pegar a bola, então o jogo vai acabar.

Cada conectivo tem sua representação simbólica e sua nomenclatura. Veja a relação de conectivos:

CONECTIVOS	NOMENCLATURA	SIMBOLOGIA
e	Conjunção	^
ou	Disjunção	v
ou...ou	Disjunção Exclusiva	v
se...então	Condicional	→
se e somente se	Bicondicional	↔

Exemplos:

- Na linguagem natural:
  - O macaco bebe leite **e** o gato come banana;
  - Maria é bailarina **ou** Juliano é atleta;
  - **Ou** o elefante corre rápido **ou** a raposa é lenta;
  - **Se** estudar, **então** vai passar;
  - Bino vai ao cinema **se e somente se** ele receber dinheiro.

- Na linguagem simbólica:
  - p ^ q;
  - p v q;
  - p $\underline{v}$ q;
  - p → q;
  - p ↔ q.

Agora que conhecemos os conectivos lógicos, vamos ver algumas **camuflagens** dos operadores lógicos que podem aparecer na prova. Veja:

- **Conectivos "e" usando "mas":**
  Exemplo: Jurema é atriz, **mas** Pedro é cantor;
- **Conectivo "ou...ou" usando "...ou..., mas não ambos":**
  Exemplo: Baiano é corredor **ou** ele é nadador, **mas não ambos;**
- **Conectivo "Se então" usando "Desde que, Caso, Basta, Quem, Todos, Qualquer, Toda vez que":**
  Exemplos: **Desde que** faça sol, Pedrinho vai à praia;
  Caso você estude, irá passar no concurso;
  Basta Ana comer massas, e engordará;
  Quem joga bola é rápido;
  Todos os médicos sabem operar;
  Qualquer criança anda de bicicleta;
  Toda vez que chove, não vou à praia.

É importante saber que na condicional a primeira proposição é o **termo antecedente** e a segunda é o **termo consequente**.

P → Q

P = antecedente

Q = consequente

TABELA VERDADE

Trata-se de uma tabela na qual conseguimos apresentar todos os valores lógicos possíveis de uma proposição.

Números de Linhas de Tabela Verdade

Neste momento, vamos aprender a construir tabelas verdade para proposições compostas.

- **1º passo:** contar a quantidade de proposições envolvidas no enunciado.

  Exemplo: P v Q (temos duas proposições).

- **2º passo:** calcular a quantidade de linhas da tabela usando a fórmula $2^n = 2^{\text{proposições}}$ (onde **n** é o número de proposições).

  Exemplo: P v Q = 2^2 = 4 linhas.

P	Q	P V Q

- **3º passo:** dispor os valores "V" e "F" na primeira coluna fazendo o agrupamento pela metade do número de linhas da tabela.

Exemplo: P v Q = 2^2 = 4 linhas = (agrupamento da primeira coluna de 2 em 2 – V V / F F).

P	Q	P V Q
V		
V		
F		
F		

- **4º passo:** preencher as demais colunas com agrupamento de valores lógicos (V ou F) sempre pela metade do agrupamento anterior.

Exemplo: primeira coluna de 2 em 2 (a próxima será de 1 em 1).

P	Q	P V Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Pronto! A nossa tabela já está montada, agora precisamos aprender qual o resultado que teremos quando combinamos os valores lógicos usando os conectivos lógicos.
Número de linhas da tabela verdade:
$2^n = 2^{\text{proposições}}$ (onde **n** é o número de proposições).
Bom! Vamos caminhar mais um pouco e aprender todas as combinações lógicas possíveis para cada conectivo lógico.

Negação (~P)

Uma proposição, quando negada, recebe valores lógicos opostos ao da proposição original. O símbolo que iremos utilizar é ¬ p ou ~p.

P	~P
V	**F**
F	**V**

Dupla Negação ~(~P)

A dupla negação nada mais é do que a própria proposição. Isto é, ~(~P) = P

P	~P	~(~P)
V	F	**V**
F	V	**F**

Conectivo Conjunção "e" (^)

Só teremos uma resposta verdadeira quando todos os valores lógicos envolvidos forem verdadeiros.

P	Q	P ^ Q
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conectivo Disjunção "Ou" (v)

Teremos resposta verdadeira quando, pelo menos, um dos valores lógicos envolvidos for verdadeiro.

P	Q	P V Q
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	F	F

Conectivo Disjunção Exclusiva "Ou...ou" ($\underline{v}$)

Teremos resposta verdadeira quando os valores lógicos envolvidos forem diferentes.

P	Q	P $\underline{V}$ Q
V	V	F
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	F	F

Conectivo Bicondicional "Se e Somente Se" (←→)

Teremos resposta verdadeira quando os valores lógicos envolvidos forem iguais.

P	Q	P←→Q
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	**F**	**V**

Conectivo Condicional "Se..., Então" (→)

Especialmente nesse caso, vamos aprender quando teremos o resultado falso, pois o conectivo condicional só tem uma possibilidade de tal ocorrência Somente teremos resposta **falsa** quando o valor lógico do antecedente for **verdadeiro** e o consequente falso.

P	Q	P → Q
V	V	V
V	**F**	**F**
F	V	V
F	F	V

Condicional **falsa**: **V**ai **F**icar **F**alsa

V → F = F

TAUTOLOGIA

É uma proposição cujo valor lógico é sempre verdadeiro.

Exemplo 1: A proposição P ∨ (~P) é uma tautologia, pois o seu valor lógico é sempre V, conforme a tabela verdade.

P	~P	P V ~P
V	F	**V**
F	V	**V**

Exemplo 2: A proposição (P Λ Q) → (P←→Q) é uma tautologia, pois a última coluna da tabela verdade só possui V.

P	Q	(P^Q)	(P←→Q)	(P^Q)→(P←→Q)
V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	F	F	**V**
F	F	F	V	**V**

CONTRADIÇÃO

É uma proposição cujo valor lógico é sempre falso.

Exemplo: A proposição P ^ (~P) é uma contradição, pois o seu valor lógico é sempre F, conforme a tabela verdade.

P	~P	P ^ (~P)
V	F	**F**
F	V	**F**

CONTINGÊNCIA

Sempre que uma proposição composta recebe valores lógicos falsos e verdadeiros, independentemente dos valores lógicos das proposições simples componentes, dizemos que a proposição em questão é uma **contingência**. Ou seja, é quando a tabela verdade apresenta, ao mesmo tempo, alguns valores verdadeiros e alguns falsos.

Exemplo: A proposição [P ^ (~Q)] v (P→~Q)] é uma contingência, conforme a tabela verdade.

P	Q	[P^(~Q)]	(P→~Q)	[P^(~Q)]V(P→~Q)
V	V	F	F	**F**
V	F	V	V	**V**
F	V	F	V	**V**
F	F	F	V	**V**

- **Tautologia:** uma proposição que é **sempre** verdadeira;
- **Contradição:** uma proposição que é **sempre** falsa;
- **Contingência:** uma proposição que pode assumir valores lógicos V e F, conforme o caso.

CONECTIVOS LÓGICOS

Os conectivos lógicos ou operadores lógicos, como também podem ser chamados, servem para ligar duas ou mais proposições simples e formar, assim, proposições compostas.

Temos 05 (cinco) operadores lógicos no total e cada um tem sua nomenclatura e representação simbólica. Veja a tabela abaixo:

Tabela de Conectivos

CONECTIVO	NOMENCLATURA	SÍMBOLO	LEITURA
e	Conjunção	^	p **e** q
ou	Disjunção	v	p **ou** q
ou...ou	Disjunção exclusiva	v̲	**Ou** p **ou** q
se...,então	Condicional (implicação)	→	**Se** p, **então** q
se e somente se	Bicondicional (bi-implicação)		p **se e somente se** q

- **Conjunção (conectivo "e"):** sua representação simbólica é ^.

  Exemplo:

  - Na linguagem natural: O macaco bebe leite **e** o gato come banana;
  - Na linguagem simbólica: p ^ q.

- **Disjunção Inclusiva (conectivo "ou"):** sua representação simbólica é v.

  Exemplo:

  - Na linguagem natural: Maria é bailarina ou Juliano é atleta;
  - Na linguagem simbólica: p v q.

- **Disjunção Exclusiva (conectivo "ou...ou"):** sua representação simbólica é: v̲.

  Exemplo:

  - Na linguagem natural: **Ou** o elefante corre rápido **ou** a raposa é lenta;
  - Na linguagem simbólica: p v̲ q.

- **Condicional (conectivos "se, então"):** sua representação simbólica é →.

  Exemplo:

  - Na linguagem natural: **Se** estudar, **então** vai passar;
  - Na linguagem simbólica: p → q.

- **Bicondicional (conectivo "se e somente se"):** sua representação simbólica é ⟷.

  Exemplo:

  - Na linguagem natural: Bino vai ao cinema **se e somente se** ele receber dinheiro;
  - Na linguagem simbólica: p⟷q.

- **Negação:** uma proposição quando negada, recebe valores lógicos opostos dos valores lógicos da proposição original. O símbolo que iremos utilizar é ¬p ou ~p.

  Exemplos:

  - p: O gato é amarelo;
  - ~p: O gato não é amarelo;
  - q: Raciocínio Lógico é difícil;
  - ~q: É falso que raciocínio lógico é difícil;
  - r: Maria chegou tarde em casa ontem;
  - ~r: Não é verdade que Maria chegou tarde em casa ontem.

Lembre-se: a negação além da forma convencional, pode ser escrita com as expressões a seguir:
É falso que ...
Não é verdade que...

Agora que já fomos apresentados aos conectivos lógicos, vamos ver algumas "camuflagens" dos operadores lógicos que podem aparecer na prova. Veja:

- **Conectivo "e" usando "mas"**

  - Exemplo: Jurema é atriz, **mas** Pedro é cantor;

- **Conectivo "ou...ou" usando "...ou..., mas não ambos"**

  - Exemplo: Baiano é corredor **ou** ele é nadador, **mas não ambos;**

- **Conectivo "Se então" usando "Desde que, Caso, Basta, Quem, Todos, Qualquer, Toda vez que"**

■ Exemplos:

Desde que faça sol, Pedrinho vai à praia;
Caso você estude, irá passar no concurso;
Basta Ana comer massas, e engordará;
Quem joga bola é rápido;
Todos os médicos sabem operar;
Qualquer criança anda de bicicleta;
Toda vez que chove, não vou à praia.

Dica

Na condicional a 1° proposição é o **termo antecedente** e a 2° é o **termo consequente**.
P → Q
P = antecedente
Q = consequente

COMPREENSÃO E ELABORAÇÃO DA LÓGICA DAS SITUAÇÕES POR MEIO DE: RACIOCÍNIO VERBAL, RACIOCÍNIO MATEMÁTICO, RACIOCÍNIO SEQUENCIAL, ORIENTAÇÃO ESPACIAL E TEMPORAL, FORMAÇÃO DE CONCEITOS, DISCRIMINAÇÃO DE ELEMENTOS

EQUIVALÊNCIA LÓGICA NOTÁVEL

Afirma-se que uma proposição P é logicamente equivalente ou equivalente a uma proposição Q se as tabelas verdade dessas duas proposições são iguais. E o que isso significa? Ora, duas proposições são equivalentes quando elas dizem exatamente a mesma coisa; quando elas têm o mesmo significado; quando uma pode ser substituída pela outra. Para indicar que são equivalentes, usaremos a seguinte notação:

$$P \Leftrightarrow Q$$

Distribuição (Equivalência pela Distributiva)

- $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

P	Q	R	Q ∨ R	P ∧ (Q ∨ R)	P ∧ Q	P ∧ R	(P ∧ Q) ∨ (P ∧ R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

- $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

P	Q	R	Q ∧ R	P ∨ (Q ∧ R)	P ∨ Q	P ∨ R	(P ∨ Q) ∧ (P ∨ R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Associação (Equivalência pela Associativa)

- $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$

P	Q	R	Q ∧ R	P ∧ (Q ∧ R)	P ∧ Q	P ∧ R	(P ∧ Q) ∧ (P ∧ R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

- $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee (p \vee r)$

P	Q	R	Q ∨ R	P ∨ (Q ∨ R)	P ∨ Q	P ∨ R	(P ∨ Q) ∨ (P ∨ R)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

Idempotência

- $p \Leftrightarrow (p \wedge p)$

P	P	P ∧ P
V	V	V
F	F	F

- $p \Leftrightarrow (p \vee p)$

P	P	P ∨ P
V	V	V
F	F	F

Pela Exportação-Importação

- $[(p \wedge q) \rightarrow r] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

P	Q	R	P ∧ Q	(P ∧ Q) → R	Q → R	P → (Q → R)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Proposições Associadas a uma Condicional (Se, Então)

Podemos dizer que as três proposições condicionais que contêm p e q são associadas a $p \rightarrow q$. Veja a seguir:

- Proposições recíprocas: $p \rightarrow q$: $q \rightarrow p$;
- Proposição contrária: $p \rightarrow q$: $\sim p \rightarrow \sim q$;

P	Q	~P	~Q	P → Q	Q → P	~P → ~Q	~Q → ~P
V	V	F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	F
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V

- Proposição contrapositiva: $p \rightarrow q$: $\sim q \rightarrow \sim p$.

Vale ressaltar que olhando para a tabela, a condicional $p \rightarrow q$ e a sua recíproca $q \rightarrow p$ ou a sua contrária $\sim p \rightarrow \sim q$ **não** são equivalentes.

Implicação Material

Na lógica proposicional, temos uma regra de substituição que diz que é válido que uma sentença condicional seja substituída por uma disjunção em que o antecedente é negado e essa é a Implicação Material. A regra determina que P implica Q é logicamente equivalente a não ~P ou Q e pode substituir o outro em provas lógicas: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$.

Onde “⇔” é um símbolo que representa “pode ser substituído em uma prova com.”

Ou seja, sempre que uma instância de “P → Q” é exibida em uma linha de uma prova, ela pode ser substituída por «~P v Q”.

Exemplo:

Se ele é um tigre P, então ele pode correr Q.

Assim, ele não é um tigre ~P ou ele pode correr Q.

Se for descoberto que o tigre não podia correr, escrito simbolicamente como P v ~Q, ambas as sentenças são falsas, mas caso contrário, elas são ambas verdadeiras.

Transposição

A transposição é uma regra de substituição válida para “P → Q” onde é permitido trocar o antecedente P pelo consequente Q de um enunciado condicional em uma prova lógica se eles estão ambos negados. É a inferência verdadeira de “A implica B”, a verdade do “Não-B implica não-A”, e vice-versa. É a regra que:

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$$

Onde “⇔” é um símbolo que representa “pode ser substituído em uma prova com.”

Ou seja, sempre que uma instância de “P → Q” é exibida em uma linha de uma prova, ela pode ser substituída por ~ Q → ~ P “.

Exemplo:

Se ele é um tigre P, então ele pode correr Q.

Assim, Se ele não pode correr ~Q, então ele não é um tigre ~P.

EQUIVALÊNCIA CONDICIONAL

Agora vamos tratar de duas equivalências importantes desse conectivo que tem a maior incidência nas provas de concursos. A primeira delas ensina como transformar uma proposição composta pelo “se...então” em outra proposição composta pelo “se... então”. A outra ensina como transformar uma proposição composta pelo “se...então” em uma composta pelo conectivo “ou” (e vice-versa). Vamos lá!

Contrapositiva

Para fazermos essa equivalência devemos inverter as proposições e depois negar todas as proposições.

Inverte e nega tudo mantendo o se então

Exemplo: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim B \rightarrow \sim A$

Se Marcos estuda, **então** ele passa. ⇔ **Se** Marcos **não** passa, **então** ele **não** estuda.

Estas duas proposições são equivalentes. Percebeu o processo de construção da segunda a partir da primeira? Você deve inverter a ordem das proposições e negar ambas.

- **“se...então” vira “ou”**

Essa equivalência é feita negando a primeira proposição, trocando o conectivo “se...então” pelo conectivo “ou”, repetindo a segunda proposição.

Nega ou Repete.

Exemplo:

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim A \vee B.$$

Se o urso é ovíparo, **então** o macaco voa. ⇔ O urso **não** é ovíparo **ou** o macaco voa.

Observe a tabela a seguir e veja que os resultados são iguais, ou seja, equivalentes:

A	B	~A	~B	A → B	~B → ~A	~A V B
V	V	F	F	**V**	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**	**V**

EQUIVALÊNCIA BICONDICIONAL

Geralmente aprendemos somente a equivalência básica desse conectivo (a comutação), mas precisamos ficar atentos para os casos especiais. O conectivo “se e somente se” tem mais duas equivalências lógicas quando interpretamos de maneira mais minuciosa o seu significado e sua tabela verdade. A seguir veremos esses detalhes que estão aparecendo cada vez mais nas provas. Então vamos lá!

Comutação

Exemplo: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \leftrightarrow A$

O céu ficará azul **se e somente se** hoje não chover. ⇔ Hoje não choverá **se e somente se** o céu ficar azul.

- **Com o conectivo “e” e “se...então”**

Para fazer essa equivalência vamos interpretar o conectivo ***“se e somente se”***. Na sua nomenclatura temos uma **bicondicional** e o quê isso significa exatamente? Significa que temos duas condicionais (se... então). E, pensando nisso, podemos dizer então que temos **uma condicional indo e uma condicional voltando**; repare que a simbologia (⟷) são duas setas. Agora vamos traduzir isso tudo com um exemplo.

Exemplo: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

O céu ficará azul **se e somente se** hoje não chover. ⇔ **Se** o céu ficará azul, **então hoje** não vai chover **e se** hoje não vai chover, **então** o céu ficará azul.

- **Com o conectivo “ou” e “tabela verdade”**

Já para entendermos essa equivalência, precisamos lembrar dos casos na tabela verdade do conetivo **“se e somente se”** quando temos resultados verdadeiros, ou seja, quando os **valores lógicos são iguais**. Sabendo disso, podemos dizer, então, que o conectivo **“se e somente se” terá resultado verdadeiro quando as proposições forem todas verdadeiras ou quando forem todas falsas** (vale lembrar que a negação de “V” será “F”). Logo, veja o exemplo de como ficará essa equivalência:

Exemplo: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$

O céu ficará azul **se e somente se** hoje não chover. ⇔ O céu ficará azul **e** hoje não vai chover **ou** o céu não ficará azul **e** hoje vai chover.

Agora observe a tabela verdade envolvendo todas as equivalências da Bicondicional:

A	B	~A	~B	A ⟷ B	B ⟷ A	(A→B) ∧ (B→A)	(A ^ B) V (~A ^ ~B)
V	V	F	F	**V**	**V**	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**	**F**	**F**
F	V	V	F	**F**	**F**	**F**	**F**
F	F	V	V	**V**	**V**	**V**	**V**

COMUTAÇÃO

Leis Comutativas

- **Conjunção “e”:**
  - Exemplo: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$;
  - Joana é magra **e** Maria é baixa. ⇔ Maria é baixa **e** Joana é magra.

A	B	A ^ B	B ^ A
V	V	**V**	**V**
V	F	**F**	**F**
F	V	**F**	**F**
F	F	**F**	**F**

- **Disjunção Inclusiva “ou”:**
  - Exemplo: $A \underline{\vee} B \Leftrightarrow B \underline{\vee} A$;
  - João anda de barco **ou** Sabrina vai à praia. ⇔ Sabrina vai à praia **ou** João anda de barco.
- **Disjunção Exclusiva “ou...ou”:**
  - Exemplo: $A \underline{\vee} B \Leftrightarrow B \underline{\vee} A$;
  - **Ou** Romeu compra uma moto **ou** ele vende o carro. ⇔ **Ou** Romeu vende o carro **ou** ele compra uma moto.

A	B	A ⊻ B	B ⊻ A
V	V	**F**	**F**
V	F	**V**	**V**
F	V	**V**	**V**
F	F	**F**	**F**

- Bicondicional “se e somente se”;
- Exemplo: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow B \;\; A$;
- O céu ficará azul **se e somente se** hoje não chover. ⇔ Hoje não choverá **se e somente se** o céu ficar azul.

A	B	A ⟷ B	B ⟷ A
V	V	**V**	**V**
V	F	**F**	**F**
F	V	**F**	**F**
F	F	**V**	**V**

- **Condicional “Se então”:** é o único conectivo lógico que não aceita a propriedade de comutação, pois o seu antecedente não pode ser o consequente e vice-versa.

$$A \rightarrow B \neq B \rightarrow A$$

LEIS DE MORGAN

Quando fazemos a negação de uma proposição composta primitiva, geramos outra posição que também é composta e equivalente à sua primitiva. É recorrente em provas a cobrança para que você responda qual a equivalência da negação de determinada proposição.