SUMÁRIO

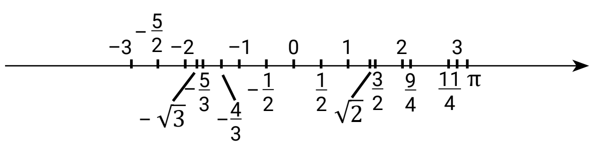
MATEMÁTICA

NÚMEROS REAIS

OPERAÇÕES E PROBLEMAS

Na geometria plana, as retas são consideradas **entidades primitivas**, ou seja, não necessitam de definição formal, pois são intuitivamente concebidas pelos seres humanos. Em geral, elas são representadas graficamente por meio de um traço contínuo sem lacunas e sem pontos em suas extremidades.

O que se estipula para elas, no entanto, são as consequências de existirem, como colocam Dolce e Pompeo (2013, p. 2): "*Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.*". Ora, bem assim são os números reais, infinitos, não só positiva e negativamente, como também entre si, pois entre e 2, por exemplo, temos o 1,5; 1,23; 1,0001; $\sqrt{2} = 1{,}412...$, entre outros. Portanto, podemos representá-los graficamente em uma reta à qual daremos o nome de **reta real**. A seguir, acompanhe a representação básica desse elemento gráfico.



Fonte: Iezzi e Murakami (2013).

Note a presença dos exemplos de **números irracionais**, $\sqrt{2}$ e π, mas também de **números inteiros**, 0, ,1 , –3 entre outros. Também podemos identificar alguns dos **números racionais** presentes entre dois inteiros quaisquer, como $\frac{1}{2}$ e $\frac{9}{4}$, por exemplo.

RELAÇÃO DE ORDEM

A relação de ordem que incide sobre o conjunto dos números reais fornece-nos uma ferramenta para podermos compará-los de forma direta quanto a sua magnitude. Sejam a e b números reais, dizer que ***a* é maior que *b*** (a > b) equivale a afirmar que ***b* é menor que *a*** ($b < a$). A mesma ideia é válida para as noções de **maior ou igual que** (≥) e **menor ou igual que** (≤).

A seguir, veja algumas propriedades principais dessas relações, considerando w, x, y e z como números reais.

- Se $x \le y$ e $w \le z$, então $\le y + z$.

Exemplo: sendo 1 ≤ 2 e 3 e ≤ 4, teremos que 1+3 ≤ 2 + 4 ⟺ 4 ≤ 6 .

- Se $0 \le x \le y$ e $0 \le z \le w$, então $0 \le xy \le yw$.

Exemplo: sendo 0 ≤ 2 ≤ 3 e 0 ≤ 4 ≤ 5, teremos que 0 ≤ 2 4 ≤ 3 · 5 ⟺ 0 ≤ 8 ≤ 15.

- Se , então .

Exemplo: sendo –4 ≤ 0, teremos que – (-4) ≥ 0 ⟺ 4 ≥ 0.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1. (CPCAR — 2021) A tabela de preços para refeições em um restaurante indica quatro opções como descritas a seguir:

OPÇÃO		VALOR DE ACORDO COM A OPÇÃO
1ª	Self service livre (por pessoa)	R$ 35,00
2ª	Self service com balança (por kg)	R$ 50,00
3ª	Prato feito pequeno (máximo de até 350 g)	R$ 15,00
4ª	Prato feito grande (máximo de até 700 g)	R$ 30,00

Fonte: Iezzi e Murakami (2013).

O cliente faz a escolha ao entrar no estabelecimento sem que possa alterá-la posteriormente e servindo-se uma única vez. Naturalmente, os clientes desejam escolher a opção que lhes faça pagar um menor valor para uma refeição com quantidade x, em kg. Assim, é correto afirmar que

a) se x = 0,29, então a melhor escolha é a 3ª opção.
b) a 2ª opção é a melhor escolha para todo .
c) se x > 0,7, então a 1ª opção é a melhor escolha.
d) qualquer que seja x tal que 0,35 < x < 0,7, a 4ª opção é a melhor escolha.

O item "a" é incorreto, pois, considerando x = 0,29, teremos que essa quantidade na 2ª opção equivale ao valor de 0,29 · 50 = R$ 14,50, o que é R$ 0,50 mais barato do que a opção 3.
O item "b" é incorreto, pois se x = 0,30, afinal 0,30,< 0,35, teríamos que na opção 2 o consumidor pagaria 0,31 · 50 = R$15,50, o que faria dela menos vantajosa do que a 3ª opção.
O item "d" é incorreto, uma vez que se x = 0,36, por exemplo, teremos que o valor da refeição na 2ª opção será dado por 0,36 · 50 = R$ 18,00, fazendo ela ser mais vantajosa do que a 4ª.
O item "c" é correto, pois se x = 0,7, então, na 2ª opção, a pessoa pagaria 0,7 · 50 = R$35,00, fazendo com que qualquer valor acima de x = 0,7 fique mais caro do que R$ 35,00 logo, a 1ª opção seria de fato mais vantajosa para x > 0,7. Resposta: Letra C.

2. (CPCAR — 2019) Sobre o conjunto solução, na variável x, x, ∈ ℜ, da equação $x^2 + 2 = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{4x^2 + 8x + 2}}$ pode-se afirmar que

a) é vazio.
b) possui somente um elemento.
c) possui dois elementos de sinais iguais.
d) possui dois elementos de siniais opostos.

Primeiramente, devemos realizar as seguintes passagens com foco maior nas radiciações, de modo a simplificar a expressão:

$x^2 + 2 = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{4x^2 + 8x + 2}}$
$x^2 + 4x + a = x^2 + 2\sqrt{4x^2 + 8x + 2}$
$x^2 + 4x + 4 - x^2 = 2\sqrt{4x^2 + 8x + 2}$
$4x + 4 = 2\sqrt{4x^2 + 8x + 2}$
$2x + 2 = \sqrt{4x^2 + 8x + 2}$
$(2x + 2) = 4x^2 + 8x + 2$
$(x + 2)^2 = x^2 + 2\sqrt{4x^2 + 8x + 2}$
$4x^2 + 8x + 4 = 4x^2 + 8x + 2$
$4x^2 + 8x + 4 = 4x^2 + 8x = 2$
$4 = 2$

O que é nitidamente contraditório, uma vez que $4 \neq 2$. Logo, não existe nenhum valor de x capaz de satisfazer a equação dada. Portanto, o conjunto solução será vazio. Resposta: Letra A.

3. (CPCAR — 2017) Considere $a = 11^{50}$, $b = 4^{100}$ e $c = 2^{150}$ e assinale a alternativa correta.

a) $c < a < b$
b) $c < b < a$
c) $a < b < c$
d) $a < c < b$

Como $a = 4^{100} = (2^2)^{100} = 2^{200}$, então $b = 2^{200}$, logo $2^{200} > 2^{150}$, ou seja, $b > c$. Como $c = (2^2)^{75} = ((2^2)^5)^{15} = (((2^2)^5)^5)^3 = (2^{50})^3 = (2^3)^{50} = 8^{50}$, portanto, $c = 8^{50}$. Não somente, como $11 > 8$, teremos que $11^{50} > 8^{50}$, ou seja, $a > c$. Por fim, como $b = (2^2)^{100} = ((2^2)^4)^{25} = ((2^2)^4)^{25} = (2^4)^{50} = 16^{50}$, teremos que $b = 16^{50}$. Para tanto, como $16 > 11$, teremos que $16^{50} > 11^{50}$, ou seja, $b > a$. Assim, $c < a$. Resposta: Letra A.

PORCENTAGENS

PROBLEMAS QUE ENVOLVEM CÁLCULO DE PERCENTUAIS

A porcentagem é uma medida de razão com base 100. Ou seja, corresponde a uma fração cujo denominador é 100. Vamos observar alguns exemplos e notar como podemos representar um número porcentual.

$$30\% = \frac{30}{100} \text{ (forma de fração)}$$

$$30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3 \text{ (forma decimal)}$$

$$30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \text{ (forma de fração simplificada)}$$

Sendo assim, a razão 30% pode ser escrita de várias maneiras:

$$30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3 = \frac{3}{10}$$

Também é possível fazer a conversão inversa, isto é, transformar um número qualquer em porcentual. Para isso, basta multiplicar por 100. Veja:

$$25 \times 100 = 2500\%$$
$$0{,}35 \times 100 = 35\%$$
$$0{,}586 \times 100 = 58{,}6\%$$

Número Relativo

A porcentagem traz uma relação entre uma parte e um todo. Quando dizemos 10% de 1000, o 1000 corresponde ao todo. Já o 10% corresponde à fração do todo que estamos especificando. Para descobrir a quanto isso corresponde, basta multiplicar 10% por 1000.

$$10\% \text{ de } 1000 = \frac{10}{100} \times 1000 = 100$$

Dessa maneira, 1000 é todo, enquanto 100 é a parte que corresponde a 10% de 1000.

Dica

Quando o todo varia, a porcentagem também varia!

Veja um exemplo:

Roberto assistiu 2 aulas de Matemática Financeira. Sabendo que o curso que ele comprou possui um total de 8 aulas, qual é o percentual de aulas já assistidas por Roberto?

O todo de aulas é 8. Para descobrir o percentual, devemos dividir a parte pelo todo e obter uma fração.

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Precisamos transformar em porcentagem, ou seja, vamos multiplicar a fração por 100:

$$\frac{1}{4} \times 100 = 25\%$$

Soma e Subtração de Porcentagem

As operações de soma e subtração de porcentagem são as mais comuns. É o que acontece quando se diz que um número excede, reduziu, é inferior ou é superior ao outro em tantos por cento. A grandeza inicial corresponderá sempre a 100%. Então, basta somar ou subtrair o percentual fornecido dos 100% e multiplicar pelo valor da grandeza.

Exemplo 1:

Paulinho comprou um curso de 200 horas-aula. Porém, com a publicação do edital, a escola precisou aumentar a carga horária em 15%. Qual o total de horas-aula do curso ao final?

Inicialmente, o curso de Paulinho tinha um total de 200 horas-aula que correspondiam a 100%. Com o aumento porcentual, o novo curso passou a ter 100% + 15% das aulas inicialmente previstas. Portanto, o total de horas-aula do curso será:

$(1 + 0{,}15) \times 200 = 1{,}15 \times 200 = 230$ horas-aula

Dica

A avaliação do crescimento ou da redução percentual deve ser feita sempre em relação ao valor inicial da grandeza.

$$\text{Variação percentual} = \frac{\text{Final} - \text{Inicial}}{\text{Inicial}}$$

Veja mais um exemplo para podermos fixar melhor.

Exemplo 2:

Juliano percebeu que ainda não assistiu a 200 aulas do seu curso. Ele deseja reduzir o número de aulas não assistidas a 180. É correto afirmar que, se Juliano chegar às 180 aulas almejadas, o número terá caído 20%?

A variação percentual de uma grandeza corresponde ao índice:

$$\text{Variação percentual} = \frac{\text{Final - Inicial}}{\text{Inicial}} = \frac{180 - 200}{200} =$$

$$-\frac{20}{200} = -0{,}10$$

Como o resultado foi negativo, podemos afirmar que houve uma redução percentual de 10% nas aulas ainda não assistidas por Juliano. O enunciado está errado ao afirmar que essa redução foi de 20%.

Agora vamos treinar o que aprendemos na teoria com exercícios comentados de diversas bancas. Vamos lá!

1. **(CEBRASPE-CESPE — 2020)** Em determinada loja, uma bicicleta é vendida por R$ 1.720 à vista ou em duas vezes, com uma entrada de R$ 920 e uma parcela de R$ 920 com vencimento para o mês seguinte. Caso queira antecipar o crédito correspondente ao valor da parcela, a lojista paga para a financeira uma taxa de antecipação correspondente a 5% do valor da parcela.
Com base nessas informações, julgue o item a seguir.
Na compra a prazo, o custo efetivo da operação de financiamento pago pelo cliente será inferior a 14% ao mês.

( ) CERTO ( ) ERRADO

Valor da bicicleta =1720,00
Parcelado = 920,00 (entrada) + 920,00 (parcela)
Na compra a prazo, o agente vai pagar 920,00 (entrada), logo vai sobrar (1720-920 = 800,00)
No próximo mês é preciso pagar 920,00 ou seja 800,00 + 120,00 de juros. Agora é pegar 120,00 (juros) e dividir por 800,00 resultado:
120,00/800,00 = 0,15% ao mês.
A questão diz que seria inferior a 0,14%, ou seja, está errada. Resposta: Errado.

2. **(CEBRASPE-CESPE — 2019)** Na assembleia legislativa de um estado da Federação, há 50 parlamentares, entre homens e mulheres. Em determinada sessão plenária estavam presentes somente 20% das deputadas e 10% dos deputados, perfazendo-se um total de 7 parlamentares presentes à sessão.
Infere-se da situação apresentada que, nessa assembleia legislativa, havia

a) 10 deputadas.
b) 14 deputadas.
c) 15 deputadas.
d) 20 deputadas.
e) 25 deputadas.

50 parlamentares
Deputadas = X
Deputados = 50-X
Compareceram 20% x e 10% (50-x), totalizando 7 parlamentares. Não sabemos a quantidade exata de cada sexo. Vamos montar uma equação e achar o valor de X.
20% x + 10% (50-x) = 7
20/100 . x + 10/100 . (50-x) = 7
2/10 . x + 1/10 . (50-x) = 7
2x/10 + 50 - x/10 = 7 (faz o MMC)
2x + 50 - x = 70
2x - x = 70 - 50
x = 20 deputadas fazem parte da Assembleia Legislativa. Resposta: Letra D.

FUNÇÃO DO 1º GRAU

REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICA E GRÁFICA

Veja a função do tipo f(x) = ax + b. Chamaremos de função de primeiro grau, onde **a** = coeficiente angular e **b** = coeficiente linear. Esta função também é chamada de função linear ou então de função afim. O gráfico dessa função é uma reta.

O coeficiente angular dá a inclinação da reta. Se a > 0, a reta será crescente e se a < 0 a reta, decrescente. Já o coeficiente linear, indica em que ponto **a** da reta do gráfico cruza o eixo das ordenadas (eixo y, ou eixo f(x)). Vejamos um exemplo:

Seja f(x) = -3x + 5, então, temos:

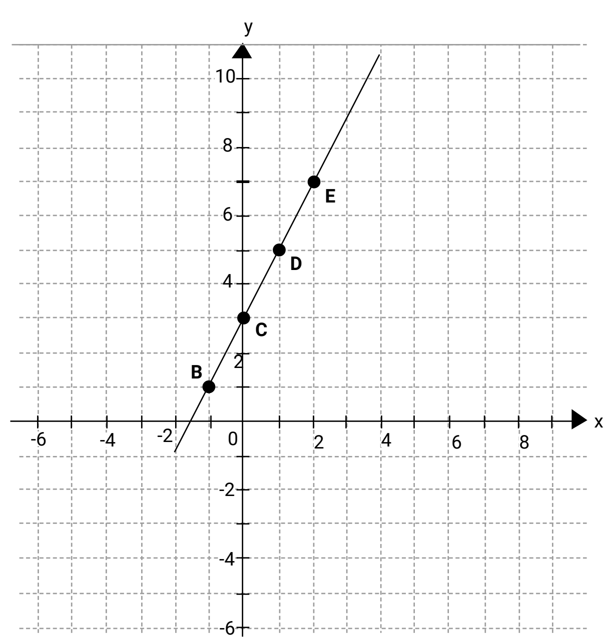
- uma função de primeiro grau (pois o maior expoente de x é 1);
- o coeficiente angular é a = -3 e o coeficiente linear é b = 5;
- logo, seu gráfico é uma reta decrescente (a < 0), que cruza o eixo y na posição y = 5 (pois este é o valor de b).

Vamos construir um gráfico da função afim f(x) = 2x +3. Atribuindo valores aleatórios para "x", temos:

f(x) = 2x +3

f(-1) = 2(-1) +3 = 1	Temos (x,y) = (-1,1)
f(0) = 2.0 +3 = 3	Temos (x,y) = (0,3)
f(1) = 2.1 +3 = 5	Temos (x,y) = (1,5)
f(2) = 2.2 +3 = 7	Temos (x,y) = (2,7)

Colocando os pontos no plano cartesiano, temos:



Raiz de uma Função Afim

Para tirar a raiz de uma função do 1° grau, basta igualar a zero. Veja:

$$f(x) = 2x + 3$$

$$2x + 3 = 0$$

$$2x = -3$$

$$x = -3/2$$

Isso significa que x = -3/2 deixa a função com a imagem igual a zero. Veja:

$$f(-3/2) = 2x + 3$$

$$f(-3/2) = 2(-3/2) + 3$$

$$f(-3/2) = -3 + 3 = 0$$

Agora vamos treinar o que aprendemos na teoria com exercícios comentados de diversas bancas. Vamos lá!

1. **(FUNDATEC — 2020)** Dois taxistas, Pedro e Aurélio, cobram suas corridas de maneiras distintas. Pedro utiliza a seguinte f(x) = 2,8x + 4,50 e Aurélio usa a g(x) = 3,20x + 3,00, em que x é a quantidade de quilômetros rodados e o resultado será o valor a ser cobrado. Supondo que Márcia quer fazer uma corrida de 8 km e fez orçamento com os dois, assinale a alternativa correta.

a) Indo com Pedro a economia será de R$ 1,70.
b) Indo com Aurélio a economia será de R$ 1,70.
c) Pedro cobra mais que Aurélio por corrida.
d) Aurélio cobra menos que Pedro por corrida.
e) Ambos cobram o mesmo valor final.

*Pedro = 2,8 * 8 + 4,5 = R$ 26,90*
*Aurélio = 3,2 * 8 + 3 = R$ 28,60*
Aurélio - Pedro = R$ 1,70
Indo com Pedro, Márcia economizará R$ 1,70.
Resposta: Letra A.

2. **(FUMARC — 2016)** Os gastos de consumo de uma família são dados pela expressão: C (r) = 2000 + 0,8r
Em que r representa a renda familiar e C representa o consumo mensal em reais.
Nessas condições, é CORRETO afirmar que:

a) Se a renda aumentar em R$ 1.000,00, então o consumo aumentará em R$ 800,00.
b) Se a renda diminuir em R$ 1.000,00, então o consumo diminuirá em R$ 2.800,00.
c) Se a renda diminuir em R$ 500,00, então o consumo também diminuirá em R$ 500,00.
d) Se a renda dobrar seu valor, então o consumo também será dobrado.

Vamos tomar como base o aumento de 1000,00 na renda
C(r) = 2000+0,8r
C(1000) = 2000+0,8.1000
C(1000) = 2000+800 = 2800
Se a renda aumentar em R$ 1.000,00, então, o consumo aumentará em R$ 800,00. Resposta: Letra A.

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS E GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

DIRETAMENTE PROPORCIONAL

Um dos tópicos mais comuns em questões de prova é “dividir uma determinada quantia em partes proporcionais a determinados números. Vejamos um exemplo para entendermos melhor como esse assunto é cobrado:

Exemplo:

A quantia de 900 mil reais deve ser dividida em partes proporcionais aos números 4, 5 e 6. A menor dessas partes corresponde a:

Primeiro vamos chamar de X, Y e Z as partes proporcionais, respectivamente a 4, 5 e 6. Sendo assim, X é proporcional a 4, Y é proporcional a 5 e Z é proporcional a 6, ou seja, podemos representar na forma de razão. Veja:

$$\frac{X}{4} = \frac{Y}{5} = \frac{Z}{6} = \text{constante de proporcionalidade.}$$

Usando uma das propriedades da proporção, somas externas, temos:

$$\frac{X + Y + Z}{4 + 5 + 6} \quad \frac{900.000}{15} = 60.000$$

A menor dessas partes é aquela que é proporcional a 4, logo:

$$\frac{X}{4} = 60.000$$

$$X = 60.000 \times 4$$

$$X = 240.000$$

INVERSAMENTE PROPORCIONAL

É um tipo de questão menos recorrente, mas não menos importante. Consiste em distribuir uma quantia X a três pessoas, de modo que cada uma receba um quinhão inversamente proporcional a três números. Vejamos um exemplo:

Exemplo:

Suponha que queiramos dividir 740 mil em partes inversamente proporcionais a 4, 5 e 6.

Vamos chamar de X as quantias que devem ser distribuídas inversamente proporcionais a 4, 5 e 6, respectivamente. Devemos somar as razões e igualar ao total que dever ser distribuído para facilitar o nosso cálculo, veja:

$$\frac{X}{4} + \frac{X}{5} + \frac{X}{6} = 740.000$$

Agora vamos precisar tirar o M.M.C (mínimo múltiplo comum) entre os denominadores para resolvermos a fração.

4 – 5 – 6 | 2

2 – 5 – 3 | 2

1 – 5 – 3 | 3