SUMÁRIO

MATEMÁTICA ARITMÉTICA

NÚMEROS NATURAIS

NÚMEROS PRIMOS

Um número natural é definido como primo se tiver exatamente dois divisores: o número 1 e ele mesmo. Já nos inteiros, $p \in Z$ é um primo se ele tem exatamente quatro divisores: ±1 e ±p.

Por definição, 0, 1 e – 1 não são números primos.

Existem infinitos números primos, como demonstrado por Euclides por volta de 300 a.C. A propriedade de ser um primo é chamada "primalidade", e a palavra "primo" é utilizada como substantivo ou adjetivo. Como 2 é o único número primo par, o termo "primo ímpar" refere-se a todo primo maior do que dois.

O conceito de número primo é muito importante na teoria dos números. Um dos resultados da teoria dos números é o *Teorema Fundamental da Aritmética*, que afirma que qualquer número natural diferente de 1 pode ser escrito de forma única (desconsiderando a ordem) como um produto de números primos (chamados fatores primos). Esse processo chama-se decomposição em fatores primos (fatoração). É exatamente esse conceito que utilizaremos no MDC e MMC.

Para caráter de memorização, seguem os 100 primeiros números primos positivos. Recomenda-se que se memorize ao menos os 10 primeiros para MDC e MMC:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541.

FATORAÇÃO

A fatoração é o **processo de decomposição**, separação, de um produto entre números quaisquer, ou seja, é a interpretação do resultado de uma multiplicação através de seus fatores multiplicativos.

Por exemplo, o número 14 pode ser fatorado como $2 \cdot 7$, ou ainda, $1 \cdot 14$. Como adição a essa ideia, temos que o 14 também pode ser expresso pela soma 6+8, que, por sua vez, pode ser **decomposta em fatores** envolvendo o número 2: $6 + 8 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$.

Pelo fato de 2 ser um **fator comum** dessa soma, podemos colocá-lo em **evidência** da seguinte forma: $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 2 \cdot (3 + 4)$. Afinal, $3 + 4 = 7$, que multiplicado por 2 retornará 14.

A seguir, acompanhe a generalização dessas ideias por meio de expressões algébricas.

Sejam a, b, c, x e $y \in \mathbb{R}$.

- **Evidenciação:** $ax + bx + cx = x \cdot (a + b + c)$.

  Exemplo: Se tivermos $2x + 3x + 4x$, então,

  $$2x + 3x + 4x = x \cdot (2 + 3 + 4) = x \cdot 9 = 9x$$

- **Agrupamento:** $ax + ay + bx + by = a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) = (x + y) \cdot (a + b)$.

  Exemplo: Se tivermos $2x + 2y + 3x + 3y$, então,

  $$2 \cdot (x + y) + 3 \cdot (x + y) = (x + y) \cdot (2 + 3) = (x + y) \cdot 5$$

NÚMERO DE DIVISORES

Diz-se que um número natural "a" é múltiplo de outro natural "b" se existir um número natural "k" tal que:

$$a = k \cdot b$$

Exemplo: 15 é múltiplo de 5, pois $15 = 3 \cdot 5$

Quando $a = k \cdot b$, segue que a é múltiplo de b, mas também a é múltiplo de k, como é o caso do número 35, múltiplo de 5 e de 7, pois: $35 = 7 \cdot 5$.

Quando $a = k \cdot b$, então, a é múltiplo de b; se conhecemos b e queremos obter todos os seus múltiplos, basta fazer k assumir todos os números naturais possíveis.

Como conclusão às assertivas propostas acima, tem-se que:

- Um número b é sempre múltiplo dele mesmo → $a = 1 \cdot b \leftrightarrow a = b$;
- Para obter os múltiplos de dois, isto é, os números da forma $a = k \cdot 2$, k seria substituído por todos os números naturais possíveis.

A definição de divisor está relacionada com a de múltiplo.

Um número natural b é divisor do número natural a, se a é múltiplo de b.

Exemplo: 3 é divisor de 15, pois $15 = 3 \cdot 5$. Logo, 15 é múltiplo de 3 e também de 5.

> **Dica**
> Um número natural tem uma quantidade finita de divisores. Por exemplo, o número 6 poderá ter no máximo 6 divisores, pois trabalhando no conjunto dos números naturais, não podemos dividir 6 por um número maior do que ele. Os divisores naturais de 6 são os números 1, 2, 3, 6, o que significa que o número 6 tem 4 divisores.

MÁXIMO DIVISOR COMUM

Agora que sabemos o que são números primos, múltiplos e divisores, vamos ao MDC. O Máximo Divisor Comum de dois ou mais números é o maior número que é divisor comum de todos os números dados.

Exemplo: Encontrar o MDC entre 18 e 24.

Divisores naturais de 18: D(18) = {1, 2, 3, 6, 9, 18}.

Divisores naturais de 24: D(24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}.

Pode-se escrever, agora, os divisores comuns a 18 e 24: $D(18) \cap D(24) = \{1, 2, 3, 6\}$.

Observando os divisores comuns, podemos identificar o maior divisor comum dos números 18 e 24, ou seja: MDC (18,24) = 6.

Outra técnica para o cálculo do MDC:

- **Decomposição em Fatores Primos:** para obter o MDC de dois ou mais números por esse processo, procede-se da seguinte maneira:

Decompõe-se cada número dado em fatores primos.

O MDC é o produto dos fatores comuns obtidos, cada um deles elevado ao seu menor expoente.

Exemplo: Achar o MDC entre 300 e 504.

300	2	
150	2	
75	3	$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$
25	5	
5	5	
1		

504	2	
252	2	
126	2	$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
63	3	
21	3	
7	7	
1		

$$MDC\ (300, 504) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número positivo que é múltiplo comum de todos os números dados. Consideremos:

Exemplo: Encontrar o MMC entre 8 e 6.

Múltiplos positivos de 6: M(6) = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...}

Múltiplos positivos de 8: M(8) = {8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, ...}

Podem-se escrever, agora, os múltiplos positivos comuns: $M(6) \cap M(8)$ = {24, 48, 72, ...}

Observando os múltiplos comuns, pode-se identificar o mínimo múltiplo comum dos números 6 e 8, ou seja: mmc(6, 8) = 24.

Outra técnica para o cálculo do MMC:

- **Decomposição isolada em fatores primos:** para obter o MMC de dois ou mais números por esse processo, procedemos da seguinte maneira:

Decompomos cada número dado em fatores primos.

O MMC é o produto dos fatores comuns e não comuns, cada um deles elevado ao seu maior expoente.

Exemplo: Achar o MMC entre 18 e 120.

18	2	
9	3	$18 = 2 \cdot 3^2$
3	3	
1		

120	2	
60	2	
30	2	$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
15	3	
5	5	
1		

$$MMC\ (18,120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$$

Exercite seus conhecimentos realizando os exercício que se segue

1. **(FEPESE — 2016)** João trabalha 5 dias e folga 1, enquanto Maria trabalha 3 dias e folga 1. Se João e Maria folgam no mesmo dia, então quantos dias, no mínimo, passarão para que eles folguem no mesmo dia novamente?

a) 8.
b) 10.
c) 12.
d) 15.
e) 24.

O período em que João trabalha e folga corresponde a 6 dias, enquanto o mesmo período, para Maria corresponde a 4 dias. Assim, o problema consiste em encontrar o MMC entre 6 e 4. Logo, eles folgarão no mesmo dia novamente após 12 dias, pois MMC(6, 4) = 12. Resposta: Letra C.

RAZÃO E PROPORÇÃO

REGRA DE TRÊS SIMPLES

A regra de três simples envolve apenas duas grandezas. São elas:

- **Grandeza Dependente:** é aquela cujo valor se deseja calcular a partir da grandeza explicativa;
- **Grandeza Explicativa ou Independente**: é aquela utilizada para calcular a variação da grandeza dependente.

Existem dois tipos principais de proporcionalidades que aparecem frequentemente em provas de concursos públicos. Veja a seguir:

Grandezas Direta e Inversamente Proporcionais

- **Grandezas diretamente proporcionais:** o aumento de uma grandeza implica o aumento da outra;
- **Grandezas inversamente proporcionais:** o aumento de uma grandeza implica a redução da outra;

Vamos esquematizar para sabermos quando será direta ou inversamente proporcionais:

DIRETAMENTE PROPORCIONAL ⟶ **+ / + OU - / -**

Aqui, as grandezas aumentam ou diminuem juntas (sinais iguais).

PROPORCIONAL ⟶ + / - **OU** - / +

Aqui, uma grandeza aumenta e a outra diminui (sinais diferentes).

Agora, vamos esquematizar a maneira que iremos resolver os diversos problemas:

DIRETAMENTE PROPORCIONAL ⟶ Multiplica cruzado

INVERSAMENTE PROPORCIONAL ⟶ Multiplica na horizontal

Vejamos alguns exemplos para fixarmos um pouco mais como funciona:

- Um muro de 12 metros foi construído utilizando 2.160 tijolos. Caso queira construir um muro de 30 metros nas mesmas condições do anterior, quantos tijolos serão necessários?

Primeiro vamos montar a relação entre as grandezas e depois identificar se é direta ou inversamente proporcional.

12 m -------- 2160 (tijolos)
30 m -------- X (tijolos)

Veja que de 12m para 30m tivemos um aumento (+) e que para fazermos um muro maior vamos precisar de mais tijolos, ou seja, também deverá ser aumentado (+). Logo, as grandezas são diretamente proporcionais e vamos resolver multiplicando cruzado. Observe:

12 m -------- 2.160 (tijolos)
30 m -------- X (tijolos)

$12 \cdot X = 30 . 2160$

$12X = 64800$

$X = 5400$ tijolos

Assim, comprovamos que realmente são necessários mais tijolos.

- Uma equipe de 5 professores gastou 12 dias para corrigir as provas de um vestibular. Considerando a mesma proporção, quantos dias levarão 30 professores para corrigir as provas?

Do mesmo jeito que no exemplo anterior, vamos montar a relação e analisar:

5 (prof.) --------- 12 (dias)
30 (prof.) -------- X (dias)

Veja que de 5 (prof.) para 30 (prof.) tivemos um aumento (+), mas, como agora estamos com uma equipe maior, o trabalho será realizado de forma mais rápida. Logo, a quantidade de dias deverá diminuir (-). Desta forma, as grandezas são inversamente proporcionais e vamos resolver multiplicando na horizontal. Observe:

5 (prof.) ⟶ 12 (dias)
30 (prof.) ⟶ X (dias)

$30 \cdot X = 5 \cdot 12$

$30X = 60$

$X = 2$

A equipe de 30 professores levará apenas 2 dias para corrigir as provas.

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

A regra de três composta envolve mais de duas variáveis. As análises sobre se as grandezas são diretamente e inversamente proporcionais devem ser feitas cautelosamente levando em conta alguns princípios:

- As análises devem sempre partir da variável dependente em relação às outras variáveis;
- As análises devem ser feitas individualmente, ou seja, deve-se comparar as grandezas duas a duas, mantendo as demais constantes;
- A variável dependente fica isolada em um dos lados da proporção.

Vamos analisar alguns exemplos e ver na prática como isso tudo funciona:

- Se 6 impressoras iguais produzem 1000 panfletos em 40 minutos, em quanto tempo 3 dessas impressoras produziriam 2000 desses panfletos?

Da mesma forma que na regra de três simples, vamos montar a relação entre as grandezas e analisar cada uma delas isoladamente duas a duas.

6 (imp.) -------- 1000 (panf.) -------- 40 (min)
3 (imp.) -------- 2000 (panf.) -------- X (min)

Vamos escrever a proporcionalidade isolando a parte dependente de um lado e igualando as razões da seguinte forma – se for direta, vamos manter a razão, agora, se for inversa, vamos inverter a razão. Observe:

$$\frac{40}{X} = \frac{?}{?} \cdot \frac{?}{?}$$

Analisando isoladamente duas a duas:

6 (imp.) -------- 40 (min)
3 (imp.) ---- ---- X (min)

Perceba que de 6 impressoras para 3 impressoras o valor diminui (-) e que o tempo irá aumentar (+), pois agora teremos menos impressoras para realizar a tarefa. Logo, as grandezas são inversas e devemos inverter a razão.

$$\frac{40}{X} = \frac{3}{6} \cdot \frac{?}{?}$$

Analisando isoladamente duas a duas:

1000 (panf.) -------- 40 (min)
2000 (panf.) ------ -- X (min)